

SÉRIE A, N° 3963

N° D'ORDRE :
4814

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PHILIPPE-AUGUSTE DIONNE

1^{re} THÈSE. — « SUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY HYPERBOL-
LIQUES BIEN POSÉS. »

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 23 juin 1962 devant la Commission d'examen :

MM. LERAY, *Président*.

EHRESMANN
MALGRANGE } *Examineurs.*

JOURNAL D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

JÉRUSALEM

1962/1963

SÉRIE A, N° 3963

N° D'ORDRE :
4814

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PHILIPPE-AUGUSTE DIONNE

1^{re} THÈSE. — « SUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY HYPERBOLIQUES BIEN POSÉS. »

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 23 juin 1962 devant la Commission d'examen :

MM. LERAY, *Président*.

EHRESMANN }
MALGRANGE } *Examineurs.*



JOURNAL D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

JÉRUSALEM

1962/1963

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY.

G. JULIA	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
DE BROGLIE	T Théories physiques.
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées.
GRASSÉ	T Evolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T Chimie organique.
CHAUDRON	T Chimie appliquée.
WYART	T Minéralogie et Cristallographie.
TEISSIER	T Zoologie.
MANGENOT	T Biologie Végétale (Orsay).
AUGER	T Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T Physiologie générale.
PIVETEAU	T Paléontologie.
ROCARD	T Physique (E.N.S.).
CARTAN	T Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE	T Chimie générale.
FAVARD	T Géométrie supérieure.
COULOMB	T Physique du Globe.
M ^{lle} COUSIN	T Biologie Animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN	T Chimie minérale.
DRACH	T Zoologie.
KASTLER	T Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI	T Génétique.
RIVIÈRE	T Géologie S.P.C.N. et sédimentation
GAUTHERET	T Biologie végétale (P.C.B.).
LUCAS R.	T Recherches physiques.
THOMAS A.	T Biologie cellulaire.
ARNULF	T Optique appliquée.
MORAND	T Physique Enseignement.
SOLEILLET	T Physique (P.C.B.).
FORTIER	T Mécanique exp. des Fluides.
DANJON	T Astronomie.
PETIT	T Biologie maritime.
QUENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T Embryologie.
EICHHORN	T Botanique.
DE CUGNAC	T Biologie végétale (S.P.C.N.).
M ^{lle} CAUCHOIS	T Chimie Physique
THELLIER	T Physique du globe
L'HERITIER	T Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T Mécanique générale.
DUBREIL	T Arithmétique et théorie des Nombres.
QUELET	T Chimie organique.
CAGNIARD	T Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T Micropaléontologie.
JUNG	T Pétrographie.
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique.

WIEMANN	T Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T Théories physiques
AMIEL	T Chimie générale.
HOCART	T Minéralogie et Cristallographie.
J.-P. MATHIEU	T Physique (Optique).
COUTEAUX	T Biologie animale (P.C.B.).
MAY	T Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMAN	T Biologie végétale marine.
GUINIER	T Physique des Solides (Orsay).
JOST	T Physiologie comparée.
FORTET	T Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ	T Calcul diff. et Intégral.
CHOUARD	T Physiologie végétale.
MALAVARD	T Aviation (Technique aéronautique).
BRELOT	T Calcul diff. et Intégral.
NORMANT	T Synthèse organique générale.
BENARD	T Chimie minérale.
BUVAT	T Botanique (E.N.S.).
DUGUÉ	T Statistiques Mathématiques.
SOULAIRAC	T Psychophysiologie.
ULRICH	T Physiologie végétale.
KIRRMANN	T Optique théorique et appl.
MARÉCHAL	T Théories chimiques.
CHADEFAUD	T Botanique.
M ^{lle} LE BRETON	T Physiologie de la nutrition.
SALEM	T Mathématiques générales.
LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T Anatomie et Histologie comparées.
EHRESMANN	T Topologie algébrique.
FRANÇON	T Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD	T Géographie physique et Géologie dynamique.
GODEMENT	T Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T Techniques mathématiques de la Physique.
ROCH	T Géologie.
SCHATZMAN	T Astrophysique.
TERMIER	T Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T Mathématiques générales.
LENNUIER	T Physique (M.G.P.).
RIZET	T Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T Géologie appliquée.
M ^{me} TONNELAT	T Physique théorique.
DIXMIER	T Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY	T Chimie générale.
AIGRAIN	T Electrotechnique générale.
BRUSSET	T Chimie systématique.
M. LEVY	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
M ^{me} CHAIX	T Chimie biologique.
M ^{me} HUREL-PY	Biologie végétale (P.C.B.).
PIAUX	T Chimie (M.P.C.).
BRUN	T Mécanique théorique des Fluides.
LEDERER	T Chimie biologique.

M ^{me} DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation).
M ^{me} LELONG	T Mathématiques (E.N.S.).
BELLAIR	T Géologie (S.P.C.N.).
COTTE	T Physique électricité.
DUBOIS J.-E.	T Chimie organique.
LAMOTTE	T Zoologie (E.N.S.).
MICHEL A.	T Chimie Minérale (Orsay).
OLMER	T Energétique générale.
ROUAULT	T Electricité (Orsay).
GAUTHIER	T Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T Chimie Physique.
BROSSEL	T Physique atomique.
BUSER	T Physiologie comparée.
CAMUS	T Physiologie végétale B.M.P.V.
CASTAING	T Physique (Orsay).
CURIEN	T Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE	T Physiologie végétale (Orsay).
NOIROT	T Evolution des Etres organisés.
PANNETIER	T Chimie générale (Orsay).
POSSOMPES	T Zoologie.
PULLMANN	T Chimie théorique.
TEILLAC	T Physique nucléaire et Radioactivité.
TONNELAT	T Biologie physico-chimique.
VILLE	T Econométrie.
WILLEMART	T Chimie (P.C.B.).
DODE	T Chimie (Orsay).
PREYMANN	T Recherches physiques.
GUINOCHE	T Biologie végétale S.P.C.N. (Orsay).
ROLLET	T Chimie (P.C.B.).
M ^{lle} JOSIEN	T Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T Electronique (Orsay).
CHAPELLE	T Physique (Orsay).
DELANGE	T Mathématiques (Orsay).
DENY	T Mathématiques générales (Orsay).
GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides.
LUCAS G.	T Géologie.
ALLARD	T Chimie Physique.
BERTHELOT	T Physique fondamentale des Hautes Energies (Orsay).
BRICART	T Météorologie et physique de l'atmosphère.
M ^{me} ALBE-FESSARD	T Psychophysiologie.
FRIEDEL	T Physique des Solides (Orsay).
M. JULIA	Etudes des Moléculaires naturelles complexes.
LENDER	T Biologie animale (S.P.C.N.) Orsay.
MAGAT	Physico-chimie des radio-éléments.
M ^{lle} QUINTIN	T Electrochimie.
MONOD	T Chimie du métabolisme.
BENOIT	T Physiologie animale (Orsay).
DE POSSEL	T Analyse numérique.
CHARLOT	T Chimie analytique.
HAISSINSKY	T Radiochimie.
LEMEE	T Physiologie végétale B.M.P.V. (Orsay).
GUERIN	T Chimie M.P.C. (Orsay).
CHATELET M.	T Chimie (P.C.B.).

JEAN	T Physique nucléaire (Orsay).
MATTTLER	T Physique S.P.C.N.
MICHEL L.	Physique théorique des Hautes Energies (Orsay).
BERGERARD	T Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T Electronique (Orsay).
BOUISSIERES	Chimie des Radioéléments (Orsay).
M ^{me} COUTURE	T Thermodynamique et Mécanique physique.
ELLENBERGER	T Géologie appliquée sur le terrain.
FRANC	Biologie animale (P.C.B.).
SCHNELL	Botanique tropicale (Orsay).
STOLKOWSKI	Physiologie générale.
ACHER	Chimie biologique (Orsay).
BAUDOIN	Biologie animale P.C.B.
BEAUMONT	Biologie animale S.P.C.N.
BLAMONT	T Géophysique ionosphère.
BOURREAU	Botanique.
CURIE D.	Physique (M.G.P.).
DURAND-DELGA	Géologie.
FREON	T Chimie organique (Orsay).
HELLER	T Physiologie végétale.
TORTRAT	T Calcul des Probabilités.
CAILLEUX	Géologie (S.P.C.N.).
MAGNAN	T Physique (S.P.C.N.).
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
M ^{lle} FOURCROY	Biologie végétale (S.P.C.N.).
M ^{me} CHOQUET-BRUHAT	T Mécanique analytique et Mécanique céleste.
M ^{lle} VEIL	Physiologie générale.
LWOFF	T Microbiologie.
SIESTRUNCK	T Mécanique physique et expérimentale.
LACOMBE	T Métallurgie des métaux nucléaires.
BROCHARD	T Physique P.C.B. (Orsay).
CABANNES	T Mécanique générale.
LESIEUR	T Mathématique M.P.C. (Orsay).
MAZET	T Mécanique générale (Orsay).
CAIRE	Géographie physique et Géologie dynamique.
COMOLET	T Mécanique des Fluides.
CORABOEUF	Physiologie animale.
DELLOUE	Physique de l'exosphère.
GORENFLOT	Botanique II (Orsay).
HOUILLOIN	Biologie animale P.C.B.
JULLIEN J.	Chimie P.C.B.
MALGRANGE	T Techniques mathématiques de la Physique.
OLIVIER	Anthropologie.
NOZERAN	T Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	Physique E.N.S. (Orsay).
CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay).
KAHANE	T Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T Mathématiques E.N.S. féminine.
KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay).
THIRY	T Mécanique céleste.

Secrétaire général R. POUILLAIN.

SUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY HYPERBOLIQUES BIEN POSÉS

Par

Philippe-A. Dionne

à Paris, France

	page
Introduction	1

Première partie

OPÉRATEURS DU TYPE DE S. L. SOBOLEV

Chapitre I: Normes et quasi-normes de fonctions .	10
Chapitre II: Normes et quasi-normes d'opérateurs différentiels .	36

Deuxième partie

INVERSES D'OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES DU TYPE DE SOBOLEV

Chapitre III: Équations hyperboliques linéaires: inégalités énergétiques et théorèmes d'unicité .	47
Chapitre IV: Équations hyperboliques linéaires: Théorèmes de faible compacité et d'existence .	57
Chapitre V: Équations quasi-linéaires	69
Chapitre VI: Équations non-linéaires	82

Introduction

Ce travail apporte à la théorie du problème de Cauchy hyperbolique bien posé les améliorations que permet l'emploi des espaces fonctionnels de S. L. Sobolev.

Nous étudions successivement les équations linéaires, quasi-linéaires et non linéaires dans une bande limitée par un hyperplan portant les données de Cauchy. Mais, on sait que la valeur de la solution du problème de Cauchy hyperbolique bien posé en un point x dépend uniquement des valeurs des points situés à l'intérieur d'un domaine, dit domaine d'influence de la solution au point x . Le problème de Cauchy hyperbolique est donc

un problème local; on transforme bien aisément⁽¹⁾ ce problème local en un problème relatif à une bande. Nous avons cherché les résultats locaux les plus forts possibles, en négligeant volontairement les complications nécessaires à l'étude détaillée de l'allure des solutions à l'infini dans cette bande.

Notre étude prolonge donc les travaux de I. Petrowsky [13], [14] que J. Leray [11], [12] puis L. Gårding [8] ont repris; elle apporte à la théorie des équations hyperboliques d'ordre quelconque toute la précision que S. L. Sobolev [16] avait obtenu dans le cas d'ordre 2.

Dans les cas quasi-linéaire et non linéaire, nous n'obtenons la solution que dans un intervalle de temps fini $[T_0, T_1]$ ayant pour origine l'instant initial T_0 , qui définit l'hyperplan limitant la bande spatiale et portant les données de Cauchy. On peut, en répétant cette opération, obtenir la solution dans un deuxième intervalle $[T_1, T_2]$, puis dans un troisième $[T_2, T_3]$, etc.; donc, finalement des résultats globaux, quand ces intervalles, dont la longueur dépend de la norme de la solution, ne décroissent pas trop vite, c'est-à-dire, quand on peut majorer a priori cette norme.

Pour tous les problèmes se ramenant à des équations hyperboliques quasi-linéaires ou non linéaires — en particulier pour ceux que posent les Théories Relativistes — il importe donc qu'on ait pu employer une norme où figurent aussi peu que possible de dérivées de la solution. Or, pour une équation non linéaire d'ordre m à l variables indépendantes, J. Leray [11], dans sa présentation de la théorie de Petrowsky, avait dû employer les dérivées d'ordres $\leq m + l + 3$ ($m + l + 2$, si l est impair). Nous réussissons ici, grâce à la théorie de Gårding des équations hyperboliques linéaires [8], [12], à réduire cet ordre à $m + \frac{l+2}{2}$ si l est pair, $m + \frac{l+3}{2}$ si l est impair.

Sommaire. — Le Chapitre I adapte aux bandes et aux hyperplans la définition des espaces fonctionnels de Sobolev. La théorie de Sobolev

1. Étant donné une équation $e[x, D^m u] = 0$ définie localement sur un ouvert, on la prolonge en l'équation $e[\varphi(x), D^m u] = 0$ définie globalement à l'aide d'une rétraction $\varphi(x)$ de l'espace tout entier sur cet ouvert: $\varphi(x)$ est à valeurs dans l'ouvert; sur cet ouvert, $\varphi(x) = x$.

vaut sur des domaines bornés, mais nous montrons que celles des inégalités de Sobolev dont tous les termes contiennent une même puissance de sommabilité valent aussi sur des domaines non bornés.

Soit E un espace euclidien réel de dimension l , dont les points ont pour coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_l)$ et soit X la bande $0 \leq x_1 \leq T$ de E . Posons

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_l^{\alpha_l}$$

et désignons par D^m l'ensemble des D^α tels que

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_l = |\alpha| \leq m.$$

Désignons par $W_p^{(\mu)}(X)$ l'espace de Banach des fonctions numériques définies sur X , de puissance p -ième sommable et ayant, au sens de la théorie des distributions, des dérivées d'ordre $\leq \mu$ qui soient des éléments de $L_p(X)$ ($N^\circ 2$).

$V_p^{(\mu)}(X)$ désignera l'espace de Banach des fonctions numériques bornées définies dans X dont les dérivées > 0 et $\leq \mu$ sont de puissance p -ième sommable ($N^\circ 2$).

Ces espaces jouissent des propriétés suivantes (Théorème 6.3 et corollaires):

Si $l < \mu p$, $W_p^{(\mu)}(X)$ et $V_p^{(\mu)}(X)$ sont des algèbres de Banach; $V_p^{(\mu)}(X)$ est une sous-algèbre de $L_\infty(X)$; $W_p^{(\mu)}(X)$ est un idéal de $V_p^{(\mu)}(X)$.

Si $l < \mu p$, $p \leq q$, alors $W_p^{(\mu)}(X)$ est un module sur l'algèbre $W_q^{(\mu)}(X)$ et sur l'algèbre $V_q^{(\mu)}(X)$.

Nous définissons ensuite des espaces fonctionnels sur $X \times Y$, Y étant un ouvert d'un espace numérique R^n . Soit $f[x, y]$ une fonction numérique définie sur $X \times Y$ et ayant, au sens de la théorie des distributions, des fonctions dérivées d'ordres $\leq \mu$.

$W_{p,\infty}^{(\mu)}(X, Y)$ désignera l'espace de Banach des fonctions f telles que

$$\sup_{y \in Y} |D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y]| \in L_p(X), \quad \text{quand } |\beta| + |\gamma| \leq \mu.$$

$V_{p,\infty}^{(\mu)}(X, Y)$ désignera l'espace de Banach des fonctions f telles que

$$\sup_{y \in Y} |D_y^\gamma f[x, y]| \in L_\infty(X), \quad \text{quand } |\gamma| \leq \mu,$$

$$\sup_{y \in Y} |D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y]| \in L_p(X), \quad \text{quand } 0 < |\beta|, |\beta| + |\gamma| \leq \mu.$$

Pour ces espaces, nous utilisons le

Théorème de substitution (Théorèmes 5.4 et 6.4; c'est une précision et un élargissement d'un théorème de Sobolev [16]). Supposons

$$1 < p, \quad \mu \leq M, \quad l-1 < (M-1)p.$$

Soit une application $y(x): X \rightarrow Y$ telle que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{S(t)} \left(\sum_{|\alpha| \leq M} |D^\alpha y(x)| \right)^p dx_2 \dots dx_l < +\infty.$$

Alors, en substituant $y(x)$ à y dans $f[x, y]$, on obtient:

$$f[x, y(x)] \in W_p^{(\mu)}(X), \quad \text{si } f[x, y] \in W_{p, \infty}^{(\mu)}(X, Y),$$

$$f[x, y(x)] \in V_p^{(\mu)}(X), \quad \text{si } f[x, y] \in V_{p, \infty}^{(\mu)}(X, Y).$$

Note. — Nous avons d'abord fait des hypothèses inutilement restrictives; L. Gårding a suggéré les hypothèses plus simples et plus générales qui précèdent. Nous l'en remercions vivement.

Le Chapitre II définit les espaces d'opérateurs différentiels dont nous aurons à faire usage: nous les disons du type de Sobolev. Pour les définir, nous nous donnons deux entiers $m \geq 0$ et $\mu \geq 0$ et un ensemble

$$Q = (q_0, q_1, \dots, q_{m+1})$$

de nombres tels que

$$2 \leq q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_{m+1} \leq +\infty.$$

$\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ désignera l'espace de Banach des opérateurs différentiels linéaires d'ordres $\leq m+1$:

$$a = a(x, D) = \sum_{\alpha \leq m+1} a_\alpha(x) D^\alpha$$

tels que

$$a_\alpha \in V_{q_{m+1}}^{(\mu)}(X) \cap V_\infty^{(1)}(X) \text{ pour } |\alpha| = m + 1,$$

$$a_\alpha \in W_{q_\alpha}^{(\mu)}(X) \text{ pour } |\alpha| \leq m, \quad (q_\alpha = q_{|\alpha|}).$$

Notons que cet espace comprend les opérateurs à coefficients constants ($q_\alpha = +\infty$ pour $|\alpha| \leq m$).

Nous disons que $a \in \mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$ satisfait à l'hypothèse de régularité si :

$$l - 1 < (m + \mu - |\alpha|) q_\alpha \text{ pour } 0 < m + \mu - |\alpha|,$$

$$q_\alpha = +\infty \text{ pour } m + \mu - |\alpha| \leq 0.$$

Cette hypothèse permet d'établir la relation énergétique générale (Chapitre III, N° 4); la preuve de cette relation exige que l'opérateur ait une partie principale $\hbar$ lipschitzienne régulièrement hyperbolique et possède les deux propriétés :

$$1) \quad a - \hbar : W_2^{(m)}(X) \rightarrow W_2^{(0)}(X) = L_2(X),$$

$$2) \quad D^\gamma a - a D^\gamma : W_2^{(m+|\gamma|)}(X) \rightarrow W_2^{(0)}(X).$$

L'hypothèse de régularité réalise ces deux conditions; elle implique par ailleurs que $V_{q_{m+1}}^{(\mu)}(X)$ est une algèbre et que $W_{q_\alpha}^{(\mu)}(X)$ est un module sur cette algèbre.

$\mathcal{V}_{\hat{p}, \infty}^{(\mu)}(X, Y, m+1)$ désignera l'espace de Banach des opérateurs différentiels linéaires d'ordres $\leq m+1$:

$$a[x, y, D] = \sum_{|\alpha| \leq m+1} a_\alpha[x, y] D^\alpha$$

tels que

$$a_\alpha \in V_{\hat{p}, \infty}^{(\mu)}(X, Y) \cap V_{\infty, \infty}^{(1)}(X, Y) \text{ pour } |\alpha| = m + 1,$$

$$a_\alpha \in W_{\hat{p}, \infty}^{(\mu)}(X, Y) \text{ pour } |\alpha| \leq m.$$

Le Chapitre III étend aux nouveaux espaces $\mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$ les inégalités énergétiques de L. Gårding et prouve l'unicité de la solution du problème de Cauchy linéaire.

Soit

$$a = \sum_{|\alpha| \leq m+1} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur régulièrement hyperbolique d'ordre $m + 1$ et soit

$$S(t) : x_1 = t$$

un hyperplan régulièrement spatial, de caractère de régularité χ_0 (N° 1). Posons

$$\chi(a, B) = \sup_{x \in B} [1/a_1, 1/\chi_0]$$

où a_1 représente le coefficient de D_1^{m+1} de a et B une bande partielle $0 \leq x_1 \leq t$, $t \leq T$ de X .

Inégalité énergétique fondamentale (N° 4). Supposons

$$a \in \mathcal{V}_0^{(0)}(X, m+1)$$

et satisfaisant à l'hypothèse de régularité,

$$f \in W_2^{(m+1)}(X).$$

Alors, on a, pour toutes les valeurs de t ,

$$\begin{aligned} & \left[\int_{S(t)} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f|^2 \right) dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2} \\ & \leq C \int_0^t \left[\int_{S(t')} |af|^2 dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2} dt' + C \left[\int_{S_0} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f|^2 \right) dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2} \end{aligned}$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de t , $\chi(a, B)$ et de la norme de a sur B ; elles sont indépendantes de cette norme pour $t = 0$.

Inégalité énergétique générale (N° 4). — Supposons

$$0 \leq \mu, \quad a \in \mathcal{V}_0^{(u)}(X, m+1)$$

et satisfaisant à l'hypothèse de régularité,

$$f \in W_2^{(m+\mu+1)}(X), \quad af = g \in W_2^{(u)}(X).$$

Alors, pour toutes les valeurs de t ,

$$\begin{aligned} & \left[\int_{S(t)} \left(\sum_{|\beta| \leq m+\mu} |D^\beta f|^2 \right) dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2} \\ & \leq C \int_0^t \left[\int_{S(t')} \left(\sum_{|\gamma| \leq \mu} |D^\gamma g|^2 \right) dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2} dt' \end{aligned}$$

$$+ C \left[\int_{S_0} \left(\sum_{\gamma \leq n-1} |D^\gamma g| \right)^2 dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2} \\ + C \left[\int_{S_0} \left(\sum_{\substack{\beta \leq m \\ |\beta| \leq m+\mu}} |D^\beta f| \right)^2 dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2},$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de t , $\chi(a, B)$ et de la norme de a sur B ; elles sont indépendantes de cette norme pour $t=0$.

Théorème d'unicité (N° 5). — Supposons

$$0 \leq \mu, \quad a \in \mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$$

régulièrement hyperbolique sur X et satisfaisant à l'hypothèse de régularité, $S(t) : x_1 = t$, hyperplan régulièrement spatial,

$$f \in W_2^{(m+1)}(X), \quad af = 0 \quad \text{sur } X \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha \leq m} |D^\alpha f| = 0 \quad \text{sur } S_0.$$

Alors,

$$f = 0 \quad \text{sur } S_0.$$

Le Chapitre IV établit les théorèmes fondamentaux de la faible compacité et de l'existence de la solution du problème de Cauchy linéaire.

Théorème d'existence (N° 3). — Supposons

$$0 \leq \mu, \quad a \in \mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$$

régulièrement hyperbolique sur X et satisfaisant à l'hypothèse de régularité.

$S(t) : x_1 = t$, hyperplan régulièrement spatial,

$$v \in W_2^{(\mu)}(X),$$

$$w_0 \in W_2^{(m+\mu)}(S_0), \quad w_1 \in W_2^{(m+\mu-1)}(S_0), \dots, w_m \in W_2^{(\mu)}(S_0).$$

Alors, l'équation linéaire

$$au = \sum_{|\alpha| \leq m+1} a_\alpha(x) D^\alpha u = v$$

a au moins une solution

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(X)$$

telle que

$$u = w_0, D_1 u = w_1, \dots, D_1^m u = w_m \text{ sur } S_0.$$

Note. — Si $l+1 < 2\mu$, on choisit $Q = (2, 2, \dots, 2)$.

Le Chapitre V résoud le problème de Cauchy hyperbolique quasi-linéaire bien posé d'inconnue $u(x)$:

$$(I) \quad \begin{cases} a[x, D^m u, D] u = b[x, D^m u] \text{ sur } X \\ u = w_0, D_1 u = w_1, \dots, D_1^m u = w_m \text{ sur } S_0 \end{cases}$$

par approximations successives provenant de la théorie des équations linéaires.

Théorème (N° 8) — Supposons

$$l-1 < 2(\mu-1) \quad ([1]) \text{ suppose } l+2 \leq \mu$$

$$a \in \mathcal{V}_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y, m+1), \quad b \in W_2^{(\mu)}(X, Y),$$

a régulièrement hyperbolique pour tout $(x, y) \in X \times Y$,
 $S : x_1 = t$ hyperplan régulièrement spatial pour tout
 $(x, y) \in X \overset{\times}{\nrightarrow} Y$;

$$w_0 \in W_2^{(m+\mu)}(S_0), \quad w_1 \in W_2^{(m+\mu-1)}(S_0), \quad \dots, \quad w_m \in W_2^{(\mu)}(S_0);$$

la fonction vectorielle

$$(D^m w_0, D^{m-1} w_1, \dots, w_m)$$

à valeurs dans une partie compacte de Y .

Conclusion: (I) admet dans une bande

$B : 0 \leq x_1 \leq T_\infty, 0 < T_\infty \leq T$ une solution et une seule u telle que

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(B), \quad \sup_{0 \leq t \leq T_\infty} \left[\int_{s(t)} \left(\sum_{|\beta| \leq m+\mu} |D^\beta u| \right)^2 dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2} < +\infty;$$

$D^{m+1} u$ est uniformément continue sur B .

Le Chapitre VI résoud le problème de Cauchy hyperbolique non linéaire bien posé, d'inconnue $u(x)$:

$$(II) \quad \begin{cases} e[x, D^{m+1}u] = 0 \text{ sur } X \\ u = w_0, D_1 u = w_1, \dots, D_1^{m+1} u = w_{m+1} \text{ sur } S_0 \end{cases}$$

en la ramenant par $\frac{\partial}{\partial x_i}$ à un problème du type (I).

Soit $e[x, y]$ une fonction numérique de $x \in X$ et d'un vecteur $y \in R^s$; y a les composantes y_α où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$, $|\alpha| \leq m+1$. Notons e_{x_i} (resp. e_{y_α}) la dérivée partielle de $e[x, y]$ par rapport à la i -ème variable (resp. à y_α).

Théorème (N° 5). — Supposons :

$$\begin{aligned} e_{x_i}[x, y], \sum_{|\alpha| \leq m+1} e_{y_\alpha}[x, y] y_\alpha - e[x, y] &\in W_2^{(\mu)}(X, Y), \\ e_{y_\alpha}[x, y] &\in V_{2, \infty}^{(\mu)}(X, Y) \cap V_{\infty, \infty}^{(1)}(X, Y) \text{ pour } |\alpha| = m+1, \\ e_{y_\alpha}[x, y] &\in W_{2, \infty}^{(\mu)}(X, Y) \text{ pour } |\alpha| \leq m, \\ h[x, y, D] &= \sum_{|\alpha| \leq m+1} e_{y_\alpha}[x, y] \cdot D^\alpha \end{aligned}$$

régulièrement hyperbolique sur $X \times Y$, $S : x_1 = t$, hyperplan régulièrement spatial pour tout $(x, y) \in X \times Y$

$$l-1 < 2(\mu-1);$$

$$w_0 \in W_2^{(m+\mu+1)}(S_0), w_1 \in W_2^{(m+\mu)}(S_0), \dots, w_{m+1} \in W_2^{(\mu)}(S_0),$$

la fonction vectorielle

$$(D^{m+1}w_0, D^m w_1, \dots, w_{m+1})$$

à valeurs dans une partie compacte de Y vérifiant

$$e[x, D^{m+1}w_0, D^m w_1, \dots, w_{m+1}] = 0 \text{ sur } S_0.$$

Conclusion : (II) admet, dans une bande $B : 0 \leq x_1 \leq T'$, une solution et une seule

$$u \in W_2^{(m+\mu+1)}(B);$$

on a

$$\sup_{0 \leq t \leq T'} \left[\int_{s(t)} \left(\sum_{|\beta| \leq m+\mu+1} |D^\beta u|^2 \right) dx_2 \dots dx_l \right]^{1/2} < +\infty;$$

$D^{m+2}u$ est uniformément continue sur B .

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à M. Jean Leray, qui, non seulement m'a suggéré d'entreprendre ces recherches, mais encore en a suivi constamment les progrès et orienté leur développement.

J'adresse aussi mes remerciements au Centre National de la Recherche Scientifique de France, au Ministère des Affaires Étrangères de France et à l'Aide à la Recherche Scientifique.

Première Partie
OPÉRATEURS DU TYPE DE S. L. SOBOLEV
Chapitre I
Normes et quasi-normes de fonctions.

1. Notations. — Soit E un espace euclidien réel de dimension finie N . Les coordonnées d'un point $x \in E$ seront notées $(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

$X = S \times T$ désignera l'une des parties de E que voici :

1) $X = E = S \times T$, S et T étant deux sous-espaces supplémentaires de X , de dimension respective n et $N - n$, $0 \leq n \leq N$, ayant respectivement pour coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x_{n+1}, \dots, x_N)$;

2) X est le demi-espace $x_i \geq 0$, S ou T étant l'un un demi-sous-espace et l'autre un sous-espace;

3) X est une bande $0 \leq x_i \leq L$, (L constante), S ou T étant l'un une bande et l'autre un sous-espace;

4) X est un cube de dimension N d'arête $0 \leq x_i \leq L$, S et T étant des cubes de dimension respective n et $N - n$.

$S = S(t)$ désignera la partie de $X : S \times \{t\}$, $t \in T$.

Note. — Si T est de dimension 0, $X = S$.

Posons

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_N^{\alpha_N};$$

D^α est donc l'opérateur de dérivation partielle

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}};$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ est un ensemble de N entiers ≥ 0 .

Notons $|\alpha|$ la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$.

D^m représentera l'ensemble des D^α tels que $|\alpha| \leq m$. Si f est une fonction numérique de x , $D^m f(x)$ sera donc un vecteur de l'espace R^r où

$$r = \binom{m+N}{N} = \frac{(m+N)!}{N! m!}.$$

$$D_i^m = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m; \quad |D^m f| = \sum_{|\alpha|=0}^m |D^\alpha f|, \quad |D^m f|' = \sum_{|\alpha|=1}^m |D^\alpha f|.$$

Nous désignerons par $C(\dots)$ diverses fonctions numériques connues, positives, continues et croissantes.

Dans les N^0 2 et 3, nous définissons des espaces de Banach qui généralisent les espaces de Sobolev; cette généralisation a pour objet l'obtention d'espaces fonctionnels suffisamment vastes qui permettent d'utiliser à la fois les inégalités de Sobolev et celles de Gårding. L'introduction des quasi-normes a pour but de relier entre elles ces inégalités.

2. Les espaces fonctionnels $L_p(X)$, $L_\infty(X)$, $W_p^{(m)}(X)$, $W_\infty^{(m)}(X)$ et $V_p^{(m)}(X)$. — Nous utilisons les dérivées, au sens de la théorie des distributions, des fonctions numériques f , définies presque partout dans X . S.L. Sobolev les appelle dérivées généralisées. On peut les définir ainsi :

Définition. — Soit ψ une fonction indéfiniment dérivable à support compact contenu dans X . S'il existe une fonction ω_α telle que, pour toutes les fonctions ψ , on ait l'identité suivante :

$$\int_X f D^\alpha \psi dx_1 \dots dx_N = (-1)^{|\alpha|} \int_X \omega_\alpha \psi dx_1 \dots dx_N,$$

on dit alors que ω_α est une dérivée, au sens de la théorie des distributions, d'ordre m , $m = |\alpha|$, de la fonction f et on écrit

$$D^\alpha f = \omega_\alpha.$$

Soit p un nombre réel ≥ 1 .

$L_p(X)$ désignera l'espace de Banach des fonctions numériques mesurables, f , définies presque partout dans X et telles que $|f|^p$ soit sommable sur

X ; la norme est

$$\|f, X\|_p = \left[\int_X |f|^p dx_1 \dots dx_N \right]^{1/p}.$$

$L_\infty(X)$ désignera l'espace de Banach des fonctions numériques mesurables, f , définies presque partout dans X et bornées. La norme est définie par la formule

$$\|f, X\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|;$$

sup désigne le "vrai maximum" de $f(x)$, c'est-à-dire le plus petit nombre $C \geq 0$ pour lequel $|f(x)| \leq C$ presque partout.

$W_p^{(m)}(X)$ désignera l'espace de Banach des fonctions numériques f , définies presque partout dans X , ayant des dérivées, au sens de la théorie des distributions, d'ordres $\leq m$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1°) f et ses dérivées d'ordres $\leq m$ sont des éléments de $L_p(X)$;
- 2°) la norme de f est

$$\|D^m f, X\|_p = \left\{ \int_X |D^m f|^p dx_1 \dots dx_N \right\}^{1/p}.$$

Note 1. — Si X est un cube, les espaces $W_p^{(m)}(X)$ sont des espaces de Sobolev.

Note 2. — Si X n'est pas un cube, les espaces $W_p^{(m)}(X)$ sont différents des espaces fonctionnels non normés $\tilde{W}_p^{(m)}(X)$ utilisés par Sobolev: les éléments de ces derniers espaces sont des fonctions définies dans E dont les restrictions à chaque cube Ω appartiennent à $W_p^{(m)}(\Omega)$.

Vu le théorème de Fubini, la fonction de t

$$\|D^m f, S(t)\|_p^p = \left[\int_{S(t)} |D^m f|^p dx_1 \dots dx_n \right]^{1/p}$$

est définie presque partout sur T ; elle est de puissance p -ième sommable sur T et

$$(2.0) \quad \int_T (\|D^m f, S(t)\|_p)^p dt_1 \dots dt_{N-n} = (\|D^m f, X\|_p)^p.$$

Nous la nommons *quasi-norme*, car elle a les trois propriétés de la

norme: pour presque toutes les valeurs de $t \in T$,

$$(2.1) \quad \|D^m(kf), S(t)\|_p = |k| \|D^m f, S(t)\|_p, \quad k \in R,$$

$$(2.2) \quad \|D^m(f+g), S(t)\|_p \leq \|D^m f, S(t)\|_p + \|D^m g, S(t)\|_p,$$

(2.3) Si $\|D^m f, S(t)\|_p = 0$ presque partout sur T , alors $f = 0$ presque partout sur X .

Nous emploierons la conséquence suivante de (2.0), qui s'en déduit par l'inégalité de Hölder (v. N° 4):

$$(2.4) \quad \int_T \|D^m f, S(t)\|_p dt_1 \dots dt_{N-n} \leq (\text{mes } T)^{1-1/p} \|D^m f, X\|_p.$$

$W_\infty^{(m)}(X)$, qui sera aussi noté $V_\infty^{(m)}(X)$, désignera l'espace de Banach des fonctions numériques f , définies presque partout dans X , ayant presque partout des dérivées d'ordres $\leq m$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1°) f et ses dérivées d'ordres $\leq m$ sont des éléments de $L_\infty(X)$;
- 2°) la norme de f est définie par

$$\|D^m f, X\|_\infty = \sup_{x \in X} |D^m f|.$$

La fonction de t

$$\|D^m f, S(t)\|_\infty = \sup_{x \in S(t)} |D^m f(x)|$$

est définie presque partout sur T ; elle est bornée et

$$\sup_{t \in T} \|D^m f, S(t)\|_\infty = \|D^m f, X\|_\infty.$$

Nous dirons que la fonction $\|D^m f, S(t)\|_\infty$ est une *quasi-norme*, car elle vérifie (2.1), (2.2) et (2.3).

$V_p^{(m)}(X)$ désignera l'espace de Banach des fonctions numériques f , définies presque partout dans X , telles que

- 1°) $f \in L_\infty(X)$ et $D^\alpha f \in L_p(X)$, $1 \leq \alpha \leq m$;

2°) la norme est

$$\|f, X\|_p^{(m)} = \|f, X\|_\infty + \|D^m f, X\|_p'$$

où

$$\|D^m f, X\|_p' = \left\{ \int_X |D^m f|^p dx_1 \dots dx_N \right\}^{1/p}.$$

La fonction de t

$$\|f, S(t)\|_p^{(m)} = \|f, S(t)\|_\infty + \|D^m f, S(t)\|_p'$$

est définie pour presque toutes les valeurs de t ; c'est une *quasi-norme*, car elle vérifie les relations (2.1), (2.2) et (2.3).

3. Les espaces fonctionnels $W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$ et $V_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$. — Soient Y un ouvert de R^r et $f[x, y]$ une fonction définie presque partout dans $X \times Y$ et à valeurs numériques. Donnons-nous un entier $m \geq 0$. Afin de majorer les fonctions $f[x, y(x)]$ où $y(x)$ prend ses valeurs dans Y , posons pour

$$i = |\beta|, \quad j = |\gamma|, \quad i + j \leq m,$$

$$F^{i, j}(x) = \sup_{y \in Y} \sum_{\substack{\beta=i \\ |\gamma|=j}} D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y].$$

Définition. $W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$ désignera l'espace de Banach des fonctions $f[x, y]$ telles que

$$\sum_{i+j=0}^m F^{i, j} \in L_p(X);$$

leur norme est

$$\|D^m f, X \times Y\|_{p, \infty} = \left\| \sum_{i+j=0}^m F^{i, j}, X \right\|_p.$$

La fonction de t

$$\|D^m f, S(t) \times Y\|_{p, \infty} = \left\| \sum_{i+j=0}^m F^{i, j}, S(t) \right\|_p$$

est définie pour presque toutes les valeurs de t ; elle vérifie les relations (2.1), (2.2) et (2.3); c'est donc une *quasi-norme*; elle est, de puissance p -ième sommable sur T et

$$(3.1) \quad \int_T (\|D^m f, S(t) \times Y\|_{p, \infty})^p dt_1 \dots dt_{N-n} = (\|D^m f, X \times Y\|_{p, \infty})^p.$$

Vu l'inégalité de Hölder (v. N° 4), il en résulte

$$(3.2) \quad \int_T \|D^m f, S(t) \times Y\|_{p, \infty} dt_1 \dots dt_{N-n} \\ \leq (\text{mes } T)^{1-1/p} \|D^m f, X \times Y\|_{p, \infty}.$$

Définition. $V_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$ désignera l'espace de Banach des fonctions numériques $f[x, y]$ muni de la norme

$$\|f, X \times Y\|_{p, \infty}^{(m)} = \left\| \sum_{j=0}^m F^{0,j}, X \right\|_{\infty} + \left\| \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \geq 0}}^m F^{i,j}, X \right\|_p.$$

La fonction de t

$$f, S(t) \times Y\|_{p, \infty}^{(m)} = \left\| \sum_{j=0}^m F^{0,j}, S(t) \right\|_{\infty} + \left\| \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \geq 0}}^m F^{i,j}, S(t) \right\|_p$$

est définie presque partout sur T ; elle vérifie les relations (2.1), (2.2) et (2.3); c'est donc une quasi-norme; elle est, si T est de mesure finie, de puissance p -ième sommable sur T , c'est-à-dire

$$(3.3) \quad \left[\int_T (\|f, S(t) \times Y\|_{p, \infty}^{(m)})^p dt_1 \dots dt_{N-n} \right]^{1/p} \leq C(T) \|f, X \times Y\|_{p, \infty}^{(m)}$$

où $C(T)$ est une fonction continue et croissante de T .

En effet, vu l'inégalité de Minkowski,

$$\left[\int_T (\|f, S(t) \times Y\|_{p, \infty}^{(m)})^p dt_1 \dots dt_{N-n} \right]^{1/p} \\ \leq \left[\int_T \left(\left\| \sum_{j=0}^m F^{0,j}, S(t) \right\|_{\infty} \right)^p dt_1 \dots dt_{N-n} \right]^{1/p} \\ + \left[\int_T \left(\sum_{\substack{i+j=1 \\ i \geq 0}}^m F^{i,j}, S(t) \right)_p^p dt_1 \dots dt_{N-n} \right]^{1/p} \\ \leq (\text{mes } T)^{1/p} \left\| \sum_{j=0}^m F^{0,j}, X \right\|_{\infty} + \left\| \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \geq 0}}^m F^{i,j}, X \right\|_p;$$

d'où (3.3).

Après avoir rappelé les inégalités de Sobolev (N° 5), nous étendons partiellement ces inégalités aux quasi-normes des espaces de Banach qu'ont définis les N° 2 et 3. Nous commençons par rappeler l'inégalité de Hölder (N° 4).

4. L'inégalité de Hölder. — Soient p et q deux nombres réels tels que $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ et

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Théorème 4. — Quelles que soient les fonctions numériques définies presque partout dans X , on a, pour presque toutes les valeurs de t ,

$$\|fg, S\|_r \leq \|f, S\|_p \|g, S\|_q.$$

Note. — Cette inégalité résulte de l'inégalité relative à des sommes finies :

$$\left(\sum_{i=1}^k |f_i g_i|^n \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^k |f_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^k |g_i|^q \right)^{1/q}.$$

5. Les inégalités de Sobolev. — Dans ce numéro, nous supposons que X est un cube. Sobolev utilise un domaine borné étoilé par rapport à une boule (ou une réunion connexe d'un nombre fini de tels domaines).

Théorème 5.1 (Comparaison de quasi-normes). —

a) Supposons

$$f \in W_p^{(m)}(X)$$

et

$$\frac{n}{p} < m.$$

Alors, pour presque toutes les valeurs de t , on a sur S

$$(5.1.1) \quad |f| \leq C(m, p, S) \|D^m f, S\|_p.$$

De plus, pour tout x et y , on a sur S , pour presque toutes les valeurs de t et pour $\beta = \min\left(1, m - \frac{n}{p}\right)$,

$$|f(y) - f(x)| \leq C(m, p, S) |x - y|^\beta \|D^m f, S\|_p.$$

b) Supposons

$$f \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$$

et
$$\frac{n}{p} < m - j.$$

Alors, pour presque toutes les valeurs de t et pour chaque valeur de y ,

$$\|F^{0,j}, S\|_{\infty} \leq C(m, p, S) \left\| \sum_{h=0}^{m-j} F^{h,j}, S \right\|_p.$$

Preuve. — v. Sobolev [16].

Lemma 5 (Comparaison de quasi-normes et normes).

a) Supposons

$$f \in W_p^{(m)}(X)$$

et
$$1 < p, \quad \frac{N}{p} - \frac{n}{p} < m, \quad \frac{N}{p} - \frac{n}{q} < m;$$

alors, pour toutes les valeurs de t ,

$$\|f, S\|_q \leq C(m, p, q, X) \|D^m f, X\|_p.$$

Preuve. — v. Sobolev [16]. Notons que Sobolev énonce ce lemme en supposant $pm < N$ et $0 < n$. Il vaut sans ces restrictions: si $pm = N$, il existe $p' < p$ vérifiant les hypothèses; la conclusion valant pour p' vaut pour p ; si $N < pm$ on applique (5.1.1), après avoir remplacé S par X, n par N ; si $n = 0$, on est dans le cas $N < pm$.

Ajoutons qu'en supposant $pm < N$, Sobolev obtient un lemme plus fort: en remplaçant l'hypothèse

$$\frac{N}{p} - \frac{n}{q} < m \quad \text{par} \quad \frac{N}{p} - \frac{n}{q^*} = m, \quad q < q^*$$

il peut écrire

$$\|f, S\|_{q^*} \leq C \|D^m f, X\|_p.$$

Nous n'aurons pas à utiliser ce dernier résultat.

b) (Nous employons ici les Notations du N° 3). —

Supposons

$$f \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$$

et
$$1 < p, \quad \frac{N}{p} - \frac{n}{p} < m - j, \quad \frac{N}{p} - \frac{n}{q} < m - j,$$

alors, pour toutes les valeurs de t ,

$$\|F^{0,j}, S\|_q \leq C(m-j, p, q, X) \left\| \sum_{i=0}^{m-j} F^{i,j}, X \right\|_p.$$

Preuve. — Analogue à celle de a).

Nous utiliserons ce lemme dans les deux cas :

$$S = X \quad (\text{Corollaire 5.1});$$

$$p = q \quad (\text{Théorème 5.2}).$$

Corollaire 5.1 (Comparaison de quasi-normes). —

a) Supposons

$$f \in W_p^{(m)}(X),$$

$$1 < p \quad \text{et} \quad \frac{n}{p} - \frac{n}{q} < m;$$

alors, pour presque toutes les valeurs de t ,

$$(5.1.2) \quad \|f, S\|_q \leq C(m, p, q, S) \|D^m f, S\|_p.$$

b) Supposons

$$f \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$$

$$1 < p \quad \text{et} \quad \frac{n}{p} - \frac{n}{q} < m - i - j;$$

alors, pour presque toutes les valeurs de t ,

$$(5.1.3) \quad \|F^{i,j}, S\|_q \leq C(m-j, p, q, S) \left\| \sum_{h=i}^{m-j} F^{h,j}, S \right\|_p.$$

Théorème 5.2 (Comparaison de quasi-normes et normes).

a) Supposons

$$f \in W_p^{(m)}(X),$$

$$1 < p \quad \text{et} \quad N - n < pm;$$

alors, pour toutes les valeurs de t ,

$$\|f, S\|_p \leq C(m, p, X) \|D^m f, X\|_p.$$

b) Supposons

$$f \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$$

$$1 < p \quad \text{et} \quad N - n < p(m - j - i)$$

alors, pour toutes les valeurs de t

$$F^{i, j}, S_p \leq C(m - j, p, X) \left| \sum_{h=i}^{m-j} F^{h, j}, X_p \right|;$$

d'où

$$\sup_{y \in Y} \left| \sum_{\substack{|\beta|=i \\ Y=j}} D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y] \right|, S_p \leq C(m - j, p, X) \|D^m f, X \times Y\|_{p, \infty}.$$

Théorème 5.3 (Quasi-normes d'un produit de dérivées). —

Supposons

$$0 \leq |\alpha| \leq m, \quad 0 \leq |\beta| \leq M, \quad 1 < p \leq q \leq +\infty$$

et

$$(5.3.1) \quad \frac{n}{q} < m + M - |\alpha| - |\beta|;$$

alors, on a, pour presque toutes les valeurs de t ,

$$(5.3.2) \quad \|(D^\alpha f)(D^\beta g), S\|_p \leq C(m, M, p, q, S) \|D^m f, S\|_q \cdot \|D^M g, S\|_p.$$

Preuve. — Si $q = +\infty$, le théorème est évident. Supposons $q < +\infty$.

Distinguons trois cas :

$$1^0) \quad m - |\alpha| \leq \frac{n}{q} \quad \text{et} \quad M - |\beta| \leq \frac{n}{p};$$

$$2^0) \quad \frac{n}{q} < m - |\alpha|;$$

$$3^0) \quad \frac{n}{p} < M - |\beta|.$$

1⁰) Supposons

$$(5.3.3) \quad m - |\alpha| \leq \frac{n}{q} \quad \text{et} \quad M - |\beta| \leq \frac{n}{p};$$

d'après le Corollaire 5.1 (5.1.2),

$$\|D^\alpha f, S\|_u \leq C(m, q, u, S) \|D^m f, S\|_q$$

si

$$(5.3.4) \quad \frac{n}{q} - \frac{n}{u} < m - |\alpha|$$

et

$$\|D^\beta g, S\|_v \leq C(M, p, v, S) \|D^M g, S\|_p$$

si

$$(5.3.5) \quad \frac{n}{p} - \frac{n}{v} < M - |\beta|;$$

donc, vu le Théorème 4 (Hölder), (5.3.2) a lieu, si la condition suivante est vérifiée :

il existe des nombres n et v vérifiant (5.3.4), (5.3.5) et

$$\frac{n}{u} + \frac{n}{v} = \frac{n}{p};$$

cette condition est équivalente à l'hypothèse (5.3.1).

2°) Supposons

$$\frac{n}{q} < m - |\alpha|;$$

alors, d'après (5.1.1),

$$\|D^\alpha f\| \leq C(m, q, S) \|D^m f, S\|_q;$$

(5.3.2) en résulte.

3°) Supposons

$$\frac{n}{p} < M - |\beta|;$$

alors, d'après (5.1.1),

$$\|D^\beta g\| \leq C(M, p, S) \|D^M g, S\|_p$$

et (5.3.2) a lieu si

$$(5.3.6) \quad \|D^\alpha f, S\|_p \leq C(m, p, q, S) \|D^m f, S\|_q.$$

Cette inégalité a lieu. En effet, si $|\alpha| = m$, (5.3.6) résulte de l'hypothèse $p \leq q$; si $|\alpha| < m$, alors (5.3.6) résulte du Corollaire 5.1 dont l'hypothèse devient

$$\frac{n}{q} - \frac{n}{p} < m - |\alpha|$$

et est vérifiée, car $p \leq q$ et $0 < m - |\alpha|$.

On a évidemment le

Corollaire 5.2 (Quasi-normes d'un produit). — Si

$$m \leq M, \quad 1 < p \leq q \leq +\infty \quad \text{et} \quad n < qM$$

alors

$$D^m(fg), S_p \leq C(m, M, p, q, S) \|D^m f, S_p\| \|D^M g, S_q\|.$$

D'où, en faisant $S = X$, $n = N$;

Corollaire 5.3 (Algèbres et Modules). — Si

$$m \leq M, \quad 1 < p \leq q \leq +\infty \quad \text{et} \quad N < qM,$$

alors,

$$W_q^{(m)}(X) \cdot W_p^{(M)}(X) \subset W_p^{(m)}(X);$$

$W_q^{(m)}(X) \cdot W_p^{(M)}(X)$ désignent l'ensemble des produits $f \cdot g$

où $f \in W_q^{(m)}(X)$ et $g \in W_p^{(M)}(X)$.

En particulier, faisons $M = m$:

Si

$1 < p \leq q \leq +\infty$ et $N < qm$, alors

$W_q^{(m)}(X)$ est une algèbre de Banach ($p = q$); et

$W_p^{(m)}(X)$ est un module sur cette algèbre.

Pour établir le théorème de substitution (Th. 5.4), nous utiliserons le Lemme 5.3; le Lemme 5.2 sert à prouver le Lemme 5.3.

Notons $[\sigma]_+ = \sup(\sigma, 0)$.

Lemme 5.2. — Soient

$$\rho \leq 0, \quad 0 \leq \lambda, \quad 0 < j \text{ (entier)}, \quad \sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \lambda, \quad 0 \leq \lambda_i.$$

Alors

$$\sup_{\lambda_i} \sum_{i=1}^j [\lambda_i + \rho]_+ = [\lambda + \rho]_+.$$

Preuve. Nous procédons par récurrence. Prouvons d'abord le lemme pour $j = 2$. Soit

$$\lambda_2 \leq \lambda_1.$$

Si $\lambda_1 + \rho \leq 0$, on a

$$[\lambda_1 + \rho]_+ + [\lambda_2 + \rho]_+ = 0 \leq [\lambda_1 + \lambda_2 + \rho]_+;$$

si $0 < \lambda_1 + \rho$ on a

$$[\lambda_1 + \rho]_+ + [\lambda_2 + \rho]_+ \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \rho \leq [\lambda_1 + \lambda_2 + \rho]_+;$$

donc, on a dans tous les cas

$$[\lambda_1 + \rho]_+ + [\lambda_2 + \rho]_+ \leq [\lambda_1 + \lambda_2 + \rho]_+;$$

il y a égalité, si $\lambda_2 = 0$.

Supposons que le lemme vaut pour $j = n$. Prouvons-le pour $j = n + 1$. Par hypothèse,

$$\sup_{\lambda_i} \sum_{i=1}^n [\lambda_i + \rho]_+ = [(\lambda - \lambda_{n+1}) + \rho]_+.$$

Vu le cas $j = 2$,

$$\sup ([(\lambda - \lambda_{n+1}) + \rho]_+ + [\lambda_{n+1} + \rho]_+) = [\lambda + \rho]_+.$$

Lemme 5.3. — Soient

$$\rho \leq -1, \quad 1 \leq \lambda, \quad 0 < j \text{ (entier)}, \quad \sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \lambda, \quad 1 \leq \lambda_i.$$

Alors,

$$\sup_{\lambda_i} \sum_{i=1}^j [\lambda_i + \rho]_+ = [\lambda - j + 1 + \rho]_+.$$

Preuve. — En substituant

$$\rho + 1 \text{ à } \rho, \quad \lambda_i - 1 \text{ à } \lambda_i \quad \text{et} \quad \lambda - j \text{ à } \lambda$$

dans le Lemme 1, on obtient le lemme.

Théorème 5.4 (Quasi-norme d'une fonction composée). — Soient les fonctions

$$y_k \in W_p^{(M)}(X), \quad k = 1, \dots, r \quad \text{et} \quad f[x, y] \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y).$$

Supposons

$$(5.4.1) \quad 1 < p, \quad m \leq M, \quad n < (M-1)p$$

et

$$y(x) = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_r(x)]$$

à valeurs dans Y et de quasi-norme

$$\|D^M y, S\|_p = \sum_{k=1}^r \|D^M y_k, S\|_p$$

bornée sur T . En substituant $y(x)$ à y dans $f[x, y]$, on obtient une fonction $f[x, y(x)]$ de x dont la quasi-norme vérifie l'inégalité:

$$(5.4.2) \quad \begin{aligned} & \|D^m f[x, y(x)], S\|_p \\ & \leq C(m, \frac{M}{p}, S) \sum_{i+j=0}^m \|F^{i,j}, S\|_p (\|D^M y, S\|_p)^j, \end{aligned}$$

donc l'inégalité

$$(5.4.3) \quad \begin{aligned} & \|D^m f[x, y(x)], S\|_p \\ & \leq C(m, M, p, S) \|D^m f, S \times Y\|_{p, \infty} [1 + \|D^M y, S\|_p]^m; \end{aligned}$$

donc, vu (3.2), N° 3, on a, puisque T est un cube

$$f[x, y(x)] \in W_p^{(m)}(X).$$

Note. — Le théorème précise un théorème de Sobolev (v. [16]), qui suppose $m = M$, $n < mp$ au prix d'hypothèses plus strictes sur f ; L. Gårding a amélioré notre énoncé; nous prouvons rapidement ce théorème.

Preuve. — $D^\alpha f[x, y(x)]$ est une combinaison linéaire à coefficients constants de termes

$$(5.4.4) \quad g_{\beta, \gamma, \lambda}(x) = D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y]_{y=y(x)} \prod_{k, \rho} D^{\lambda(k, \rho)} y_k(x)$$

où k parcourt l'ensemble des valeurs $1, 2, \dots, r$ pour lesquelles $\gamma_k > 0$; ρ parcourt l'ensemble des valeurs $1, 2, \dots, \gamma_k$; $\lambda(k, \rho)$ désigne $[\lambda_1(k, \rho), \dots, \lambda_N(k, \rho)]$, $\lambda_\sigma(k, \rho)$ étant une fonction à valeurs entières > 0 ; λ vérifie

$$\beta + \sum_{k, \rho} \lambda(k, \rho) = \alpha.$$

Donc, en posant

$$(5.4.5) \quad i = |\beta|, j = |\gamma| = \text{nombre de valeurs prises par } (k, \rho),$$

on a

$$1 \leq |\lambda(k, \rho)|,$$

$$(5.4.6) \quad \sum_{k, \rho} |\lambda(k, \rho)| = |\alpha| - i,$$

$$(5.4.7) \quad i + j \leq |\alpha|.$$

On suppose $|\alpha| \leq m$ et l'on veut prouver que

$$(5.4.8) \quad \|g_{\beta, \gamma, \lambda}, S\|_p \leq C(m - j, M, p, S) \sum_{h=0}^{m-j} \|F^{h, j}, S\|_p (\|D^M y, S\|_p)^j.$$

Pour justifier le choix de l'espace fonctionnel $W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y) \ni f[x, y]$, nous allons déduire de la théorie de Sobolev à quels espaces $L_q(X)$ appartiennent les $\prod_{k, \rho} D^{\lambda(k, \rho)} y_k$; nous pourrions alors choisir les $\sup_y \|D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y]\|$ dans des espaces $L_{r_i, j}(X)$ tels que les $g_{\beta, \gamma, \lambda}$ appartiennent à $L_p(X)$.

Si $j = 0$, l'ensemble des (k, ρ) est vide et l'on réalise $g_{\beta, 0, 0}(x) \in L_p(X)$ en choisissant $\sup_y |D_x^\beta f[x, y]| \in L_p(X)$.

Supposons $1 \leq j$. Vu que

$$|\lambda| \leq m \leq M$$

et vu le Corollaire 5.1 a) (Lemme 5), on a

$$\|D^{\lambda(k, \rho)} y_k, S\|_{q_{k, \rho}} \leq C(M, p, q_{k, \rho}, S) \|D^M y_k, S\|_p$$

quand $q_{k, \rho}$ vérifie

$$\frac{n}{p} - M + |\lambda(k, \rho)| < \frac{n}{q_{k, \rho}}, \quad 1 \leq q_{k, \rho} \leq +\infty.$$

Vu le Théorème 4 (Hölder),

$$\left\| \prod_{k, \rho} D^{\lambda(k, \rho)} y_k, S \right\|_q \leq \prod_{k, \rho} \|D^{\lambda(k, \rho)} y_k, S\|_{q_{k, \rho}}$$

quand q vérifie

$$\sum_{k, \rho} \frac{1}{q_{k, \rho}} = \frac{1}{q},$$

Σ étant étendu à tous les (k, ρ) vérifiant (5.4.6).

Donc, vu que $\sum_{k, \rho} 1 = j$, pour obtenir

$$(5.4.9) \quad \left\| \prod_{k, \rho} D^{\lambda(k, \rho)} y_k, S \right\|_q \leq C(M, p, q, S) (\|D^M y, S\|_p)^j$$

il suffit d'avoir :

$$\sum_{k, \rho} \left[\frac{n}{p} - M + |\lambda(k, \rho)| \right]_+ < \frac{n}{q};$$

donc, vu le Lemme 5.3,

$$\left[\frac{n}{p} - M + \sum_{k, \rho} |\lambda(k, \rho)| \right]_+ < \frac{n}{q}$$

c'est-à-dire, vu (5.4.6)

$$\left[\frac{n}{p} - M + |\alpha - i - j + 1| \right]_+ < \frac{n}{q}.$$

Complétons ce résultat : si

$$\frac{n}{p} - M + |\alpha| - i - j + 1 < 0,$$

alors

$$\frac{n}{p} - M + \sum_{k, \rho} |\lambda(k, \rho)| - j + 1 < 0,$$

donc, puisque le nombre de valeurs prises par (k, ρ) est j et que

$$1 \leq |\lambda(k, \rho)|, \quad \text{on a} \quad \frac{n}{p} - M + |\lambda(k, \rho)| < 0;$$

donc, quand on choisit $q_{k, \rho} = +\infty$, $q = +\infty$, l'inégalité (5.4.9) vaut encore.

L'inégalité (5.4.9.) vaut donc pour

$$(5.4.10) \quad \frac{n}{p} - M + |\alpha| - i - j + 1 < \frac{n}{q}.$$

Pour obtenir des $r_{i, j}$ tels que

$$\begin{aligned} & \| D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y]_{y=y(x)} \prod_{k, \rho} (D^{\lambda(k, \rho)} y_k(x), S \|_p \\ & \leq \| \sup_y | D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y] |, S \|_{r_{i, j}} \| \prod_{k, \rho} (D^{\lambda(k, \rho)} y_k), S \|_q \end{aligned}$$

il suffit, vu l'inégalité de Hölder, de les choisir tels que

$$\frac{1}{r_{i, j}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}, \quad p \leq r_{i, j};$$

donc, compte tenu de (5.4.4), (5.4.9) et (5.4.10), nous avons

$$(5.4.11) \quad \| g_{\beta, \gamma, \lambda}, S \|_p \leq C(M, p, S) \| \sup_y | D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y] |, S \|_{r_{i, j}} \cdot (\| D^M y, S \|_p)^j$$

quand

$$(5.4.12) \quad \frac{n}{r_{i, j}} < M - m + i + j - 1, \quad p \leq r_{i, j}.$$

Puisque $p \leq r_{i, j}$ supposons

$$(5.4.13) \quad f \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y);$$

vu le Corollaire 5.1 b), on a

$$(5.4.14) \quad \begin{aligned} & \| \sup_y | D_x^\beta D_y^\gamma f[x, y] |, S \|_{r_{i, j}} \\ & \leq C(m - j, p, r_{i, j}, S) \| \sum_{h=i}^{m-j} F^{h, j}, S \|_p \end{aligned}$$

pour

$$(5.4.15) \quad \begin{cases} r_{i,j} = \phi, & \text{si } i+j = m \\ \frac{n}{\phi} - m + i + j < \frac{n}{r_{i,j}}, & \text{si } i+j < m; \end{cases}$$

or, si

$$(5.4.16) \quad 0 < M - m + i + j - 1,$$

il existe des $r_{i,j} \geq \phi$ vérifiant à la fois (5.4.12) et (5.4.12)^s, car par hypothèse

$$\frac{n}{\phi} < M - 1.$$

La condition (5.4.16), où $i \leq 0$ et $1 \leq j$ est vérifiée pour

$$(i, j, m) \neq (0, 1, M),$$

(5.4.8) est donc établi, sauf dans le cas

$$(i, j, m) = (0, 1, M).$$

Dans ce cas, $\prod_{k,\rho} D^{\lambda(k,\rho)} y_k$ contient un seul facteur; (5.4.9) vaut donc pour $q = \phi$ et alors (5.4.11) vaut en choisissant $r_{0,1} = +\infty$; or, pour un tel choix, l'hypothèse (5.4.13) entraîne (5.4.14), compte tenu du Corollaire 5.1 b) et les hypothèses

$$m = M, \quad \frac{n}{\phi} - M + 1 < 0.$$

Dans tous les cas, l'hypothèse (5.4.13) entraîne la conclusion désirée; la théorie est prouvée.

6. Extension partielle des inégalités de Sobolev. X et S sont définis au N°1. Il s'agit d'étendre aux fonctions définies sur certains domaines non bornés les inégalités qui viennent d'être établies pour les fonctions définies sur des cubes.

Théorème 6.1 (Comparaison de quasi-normes). — Soit

$$\frac{n}{\phi} < m.$$

Alors, pour presque toutes les valeurs de t , on a sur S ,

$$(6.1.1) \quad |f| \leq C(m, \phi, S) \|D^m f\|_p, \quad S\|_p.$$

De plus, pour tout x et y , on a sur S , pour presque toutes les valeurs de t et pour $\beta = \min \left(1, m - \frac{n}{p} \right)$,

$$(6.1.2) \quad |f(y) - f(x)| \leq C(m, p, S) |x - y|^\beta \|f, S\|_p^{(m)};$$

$$(6.1.3) \quad |f(y) - f(x)| \leq C(m, p, S) |x - y|^\beta \|D^m f, S\|_p.$$

Preuve. Supposons que X n'est pas un cube. Menons dans S les hyperplans $x_i = vL$, $i = 1, 2, \dots, n$, v est un entier et L est la largeur de S si S est une bande, une longueur arbitraire si S n'est pas une bande. S est alors décomposé en cubes égaux Ω d'arête L . Pour chacun de ces cubes, vu (5.1.1), Théorème 5.1, N^0 5 (Sobolev), on a sur Ω ,

$$|f| \leq C(m, p, \Omega) \|D^m f, \Omega\|_p \leq C(m, p, S) \|D^m f, S\|_p,$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq C(m, p, \Omega) |x - y|^\beta \|f, \Omega\|_p^{(m)} \\ &\leq C(m, p, S) |x - y|^\beta \|f, S\|_p^{(m)}; \end{aligned}$$

d'où (6.1.1) et (6.1.2); C dépend de S en ce sens qu'il dépend de la dimension n du cube Ω et de sa mesure; C est invariant par toute translation du cube. (6.1.3) se prouve comme (6.1.2).

Note. $C(S) \rightarrow +\infty$ quand $L \rightarrow 0$, L étant l'arête de S , si S est un cube, ou la largeur de S , si S est une bande. Nous ne nous placerons jamais dans ce cas.

Corollaire. — Si $N < pm$, alors la norme $\|D^m f, X\|_p$ est équivalente à

$$\|f, X\|_\infty + \|D^m f, X\|_p$$

et par suite

$$W_p^{(m)}(X) \subset V_p^{(m)}(X).$$

Théorème 6.2 (Comparaison de quasi-normes et normes.) —

a) Supposons

$0 < m, 1 < p$, λ entier compris dans l'intervalle $0 < \lambda \leq m$

et

$$N - n < p\lambda;$$

alors, pour toutes les valeurs de t ,

$$(6.2.1) \quad \|D^{m-\lambda} f, S\|_p \leq C(m, p, X) \|D^m f, X\|_p,$$

$$(6.2.2) \quad \|f, S\|_p^{(m-\lambda)} \leq C(m, p, X) \|f, X\|_p^{(m)}.$$

b) Supposons

$$f \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y) \text{ (resp. } V_{p, \infty}^{(m)}(X, Y))$$

$0 < m, 1 < p, \lambda$ entier compris dans l'intervalle $0 < \lambda \leq m$,
 ~~$0 \leq j \leq m - \lambda$~~ et

$$N - n < p \left(\lambda + \frac{1}{p} \right)$$

alors, pour toutes les valeurs de t ,

$$\|F^{m-j-\lambda, j}, S\|_p \leq C(m-j, p, X) \left\| \sum_{h=m-j-\lambda}^{m-j} F^{h, j}, X \right\|_p;$$

d'où

$$\|D^{m-\lambda} f, S \times Y\|_{p, \infty} \leq C(m, p, X) \|D^m f, X \times Y\|_{p, \infty}$$

(resp. $\|f, S \times Y\|_{p, \infty}^{(m-\lambda)} \leq C(m, p, X) \|f, X \times Y\|_{p, \infty}^{(m)}.$

Preuve. a) analogue à celle du Théorème 6.3.

b) analogue à celle du Théorème 6.3.

Théorème 6.3 (Quasi-normes d'un produit de dérivées).

Supposons

$$|\alpha| \leq m, \quad |\beta| \leq M, \quad 1 < p \leq q \leq +\infty$$

et

$$\frac{n}{q} < m + M - |\alpha| - |\beta|,$$

alors, on a, pour presque toutes les valeurs de t ,

$$(6.3.1) \quad \|(D^\alpha f)(D^\beta g), S\|_p \leq C(m, M, p, q, S) \|D^m f, S\|_q \|D^M g, S\|_p;$$

$$(6.3.2) \quad \|(D^\alpha f)(D^\beta g), S\|_p \leq C(m, M, p, q, S) \|f, S\|_q^{(m)} \|D^M g, S\|_p;$$

$$(6.3.3) \quad \|(D^\alpha f)(D^\beta g), S\|_q \leq C(m, M, p, q, S) \|f, S\|_q^{(m)} \|g, S\|_p^{(M)};$$

on suppose dans (6.3.3) $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

Note. Si $q = +\infty$, on a évidemment ces trois inégalités sous les seules hypothèses: $|\alpha| \leq m$ et $|\beta| \leq M$.

Preuve de (6.3.1). Étant donné une partition de S en cubes égaux, on a

$$(6.3.4) \quad (\|\dots, S\|_p)^p = \sum_Q (\|\dots, \Omega\|_p)^p.$$

Il résulte du Théorème 5.3 (5.3.2) N° 5, que

$$(6.3.5) \quad (\|(D^\alpha f)(D^\beta g), \Omega\|_p)^p \\ \leq [C(m, M, p, q, S) \|D^m f, S\|_q]^p (\|D^M g, \Omega\|_p)^p;$$

appliquant $\sum_Q$ et (6.3.4) à l'inégalité (6.3.5), il vient (6.3.1).

Note 1. Ce raisonnement utilise de façon essentielle que le même p figure dans les deux membres de (6.3.1).

Note 2. Ce raisonnement donne aisément les inégalités;

$$(6.3.6) \quad \|(D^\alpha f)(D^\beta g), S\|_p \leq C(m, M, p, q, S) \|D^m f, S\|'_q \|D^M g, S\|_p$$

si $0 < |\alpha|$; et

$$(6.3.7) \quad \|(D^\alpha f)(D^\beta g), S\|_p \leq C(m, M, p, q, S) \|D^m f, S\|'_q \|D^M g, S\|'_p$$

si $0 < |\alpha|$ et $0 < |\beta|$.

Preuve de (6.3.2). Si $0 < |\alpha| \leq m$, (6.3.2) résulte de (6.3.6). Si $|\alpha| = 0$, on a évidemment,

$$\|f D^\beta g, S\|_p \leq \|f, S\|_\infty \|D^M g, S\|_p,$$

donc (6.3.2) a fortiori.

Preuve de (6.3.3). Si $0 < |\alpha|$ et $0 < |\beta|$, alors (6.3.3) résulte de (6.3.7). Si $0 < |\alpha|$ et $|\beta| = 0$, on a évidemment,

$$\|(D^\alpha f)g, S\|_q \leq \|D^m f, S\|'_q \|g, S\|_\infty,$$

donc aussi (6.3.3). Il en est de même, si $|\alpha| = 0$ et $0 < |\beta|$.

Corollaire 1. (Quasi-normes d'un produit). Si

$$m \leq M, \quad 1 < p \leq q \leq +\infty \quad \text{et} \quad n < qM,$$

alors

$$(6.3.8) \quad \|D^m(fg), S\|_p \leq C(m, M, p, q, S) \|D^m f, S\|_q \|D^M g, S\|_p,$$

$$(6.3.9) \quad \|D^m(fg), S\|_p \leq C(m, M, p, q, S) \|f, S\|_q^{(m)} \|D^M g, S\|_p,$$

$$(6.3.10) \quad \|fg, S\|_q^{(m)} \leq C(m, M, q, S) \|f, S\|_q^{(m)} \|g, S\|_q^{(M)}.$$

Preuve. (6.3.8) et (6.3.9) résultent respectivement de (6.3.1) et (6.3.2). (6.3.10) résulte de (6.3.3) et de la relation évidente,

$$\|fg, S\|_{\infty} \leq \|f, S\|_{\infty} \|g, S\|_{\infty}.$$

En faisant dans le Corollaire 1, $S = X$, $n = N$, on en tire le

Corollaire 2. (Algèbres et Modules). Si

$$m \leq M, \quad 1 < p \leq q \leq +\infty \quad \text{et} \quad N < qM,$$

alors,

$$(6.3.11) \quad W_q^{(m)}(X) \cdot W_p^{(M)}(X) \subset W_p^{(m)}(X),$$

$$(6.3.12) \quad V_q^{(m)}(X) \cdot W_p^{(M)}(X) \subset W_p^{(m)}(X),$$

$$(6.3.13) \quad V_q^{(m)}(X) \cdot V_q^{(M)}(X) \subset V_q^{(m)}(X).$$

En particulier faisons $M = m$, $p = q$; puis $M = m$, $p \leq q$; si $1 < q \leq +\infty$ et $N < qm$ alors, $V_q^{(m)}(X)$ est une algèbre de Banach, sous-algèbre de $L_{\infty}(X)$; $W_q^{(m)}(X)$ est un idéal de $V_q^{(m)}(X)$; si $1 < p \leq q \leq +\infty$ et $N < qm$ alors, $W_p^{(m)}(X)$ est un module sur l'algèbre $V_q^{(m)}(X)$.

Théorème 6.4 (Quasi-norme d'une fonction composée). Soient les fonctions

$$y_k(x) \in W_p^{(M)}(X), \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

et

$$f[x, y] \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y) \quad (\text{resp. } V_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)).$$

Supposons

$$1 < p, \quad m \leq M, \quad n < (M - 1)p$$

et

$$y(x) = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_r(x)]$$

à valeurs dans Y et de quasi-norme

$$\|D^M y, S\|_p = \sum_{k=1}^r \|D^M y_k, S\|_p$$

bornée sur T . En substituant $y(x)$ à y dans $f[x, y]$, on

obtient une fonction $f[x, y(x)]$ dont la quasi-norme vérifie l'inégalité:

$$(6.4.1) \quad \|D^m f[x, y(x)], S\|_p \leq C(m, M, p, S) \|D^m f, S \times Y\|_{p, \infty} [1 + \|D^M y, S\|_p]^m$$

$$(6.4.2) \quad (\text{resp. } \|f[x, y(x)], S\|_p^{(m)} \leq C(m, M, p, S) \|f, S \times Y\|_{p, \infty}^{(m)} [1 + \|D^M y, S\|_p]^m),$$

donc, vu (3.2) (resp. (3.3)) du N° 3, on a, si T est de mesure finie.

$$f[x, y(x)] \in W_p^{(m)}(X) \quad (\text{resp. } V_p^{(m)}(X)).$$

Note. La relation (6.4.2) vaut encore quand on remplace

$$\|D^M y(x), S\|_p \quad \text{par} \quad \|y(x), S\|_p^{(M)}.$$

Preuve. Supposons que X n'est pas un cube.

a) Soit $f \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$. Il résulte du Théorème 5.4 (5.4.2) et de l'inégalité de Hölder que, pour une partition de S en cubes égaux Ω , on a

$$(6.4.3) \quad (\|D^m f(x, y(x)), \Omega\|_p)^p \leq (m+1)^{p-1} C^p \sum_{j=0}^m \left(\left\| \sum_{i=0}^{m-j} F^{i,j}, \Omega \right\|_p \right)^p (\|D^M y, \Omega\|_p)^{jp} \\ \leq (m+1)^{p-1} C^p \left(\left\| \sum_{i=0}^m F^{i,0}, \Omega \right\|_p \right)^p + (m+1)^{p-1} C^p \sum_{j=1}^m \left(\left\| \sum_{i=0}^{m-j} F^{i,j}, S \right\|_p \right)^p (\|D^M y, S\|_p)^{jp-p} \\ \cdot (\|D^M y, \Omega\|_p)^p;$$

tenant compte de la relation

$$(\| \dots, S \|_p)^p = \sum_{\Omega} (\| \dots, \Omega \|_p)^p$$

et de la définition de $\|D^m f, S \times Y\|_{p, \infty}$, il vient (6.4.1).

b) Supposons $f \in V_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$. Dans le raisonnement prouvant (5.4.2) (Théorème 5.4), l'inégalité (5.4.9) du Théorème 5.4 ne doit plus être employée que pour $i > 0$; ce raisonnement donne

$$\begin{aligned}
& \| D^m f [x, y(x)], \Omega \|'_p \\
& \leq C(m, M, p, \Omega) \left\| \sum_{j=1}^m \| F^{0,j}, \Omega \|_\infty (\| D^M y, \Omega \|_p)^j \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^m \left\| \sum_{i=1}^{m-j} F^{i,j}, \Omega \right\|_p (\| D^M y, \Omega \|_p)^j \right\|
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
& (\| D^m f [x, y(x)], \Omega \|'_p)^p \\
& \leq m^{p-1} C^p \sum_{j=1}^m (\| F^{0,j}, S \|_\infty)^p (\| D^M y, S \|_p)^{jp-p} \\
& \quad \cdot (\| D^M y, \Omega \|_p)^p \\
& \quad + (m+1)^{p-1} C^p \sum_{j=0}^m \left(\left\| \sum_{i=1}^{m-j} F^{i,j}, S \right\|_p \right)^p (\| D^M y, S \|_p)^{jp-p} \\
& \quad \cdot (\| D^M y, \Omega \|_p)^p;
\end{aligned}$$

d'où, en sommant sur tous les cubes Ω ,

$$\begin{aligned}
& \| D^m f [x, y(x)], S \|'_p \leq C \sum_{j=1}^m \| F^{0,j}, S \|_\infty (\| D^M y, S \|_p)^j \\
& \quad + C \sum_{j=0}^m \left\| \sum_{i=1}^m F^{i,j}, S \right\|_p (\| D^M y, S \|_p)^j.
\end{aligned}$$

D'autre part, il est évident que

$$\| f [x, y(x)], S \|_\infty \leq \| F^{0,0}, S \|_\infty;$$

d'où (6.4.2).

Corollaire 1. Supposons

$$y_i, z_i \in W_p^{(M)}(X), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$\| D^M y, S \|_p = \sum_{i=1}^r \| D^M y_i, S \|_p \quad \text{borné sur } T,$$

$$\| D^M z, S \|_p = \sum_{i=1}^r \| D^M z_i, S \|_p \quad \text{borné sur } T,$$

$$f \in W_{p,\infty}^{(m)}(X, Y) \quad (\text{resp. } V_{p,\infty}^{(m)}(X, Y)),$$

où Y contient les valeurs de $y(x) + \tau z(x)$ quel que soit $\tau \in [0, 1]$. Si

$$1 < p, \quad m \leq M, \quad n < (M-1)p,$$

alors, pour presque toutes les valeurs de t ,

$$\|D^{m-1}\{f[x, y(x) + \tau z(x)] - f[x, y(x)]\}, S\|_p < K \|D^{M-1}z, S\|_p$$

où

$$\begin{aligned} K &= C(m, M, p, S) \|D^m f, S \times Y\|_{p, \infty} \\ &\quad \cdot (1 + \|D^M y, S\|_p + \|D^M z, S\|_p)^{m-1} \\ (\text{resp. } K &= C(m, M, p, S) \|f, S \times Y\|_{p, \infty}^{(m)} \\ &\quad \cdot (1 + \|D^M y, S\|_p + \|D^M z, S\|_p)^{m-1}). \end{aligned}$$

Preuve. On a

$$(6.4.4) \quad f[x, y + z] - f[x, y] = \sum_{i=1}^r z_i \int_0^1 f_y[x, y + \tau z] d\tau.$$

Supposons $f \in W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$. Alors, vu la formule (6.3.8) du Corollaire 1, Théorème 6.3, où l'on fait $q = p$ et où l'on remplace m et M par $m-1$ et $M-1$ respectivement, on a

$$\begin{aligned} (6.4.5) \quad &\|D^{m-1}\{f[x, y(x) + z(x)] - f[x, y(x)]\}, S\|_p \\ &\leq C(m, p, S) \|D^{M-1}z, S\|_p \\ &\quad \cdot \int_0^1 \|D^{m-1}f_y[x, y(x) + \tau z(x)], S\|_p d\tau. \end{aligned}$$

Or, vu l'inégalité du Théorème 6.4, on a pour chaque valeur de τ ,

$$\begin{aligned} (6.4.6) \quad &\|D^{m-1}f_y[x, y(x) + \tau z(x)], S\|_p \\ &\leq C(m, M, p, S) \|D^{m-1}f_y, S \times Y\|_{p, \infty} \\ &\quad \cdot (1 + \|D^M y, S\|_p + \|D^M z, S\|_p)^{m-1}; \end{aligned}$$

d'où l'inégalité cherchée, en substituant (6.4.6) dans (6.4.5).

Si $f \in V_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$, on procède d'une façon analogue en utilisant (6.3.9) au lieu de (6.3.8) et (6.4.2) au lieu de (6.4.1).

Corollaire 2. Les notations et hypothèses étant celles du Corollaire 1, on a, si

$$u \in W_p^{(M-1)}(X)$$

et

$$f[x, y] \in V_{p, \infty}^{(m)}(X, Y) \quad \text{ou} \quad W_{p, \infty}^{(m)}(X, Y)$$

l'inégalité

$$\begin{aligned} & \|D^{m-1}\{f[x, y(x) + z(x)]u - (f[x, y(x)])u\}, S\|_p \\ & \leq K \|D^{M-1}z, S\|_p \|D^{M-1}u, S\|_p. \end{aligned}$$

Preuve. On applique d'abord au premier membre de l'inégalité la formule (6.3.8) du Corollaire 1, Théorème 6.3 où l'on fait $p = q$ et où l'on remplace m par $m - 1$ et M par $M - 1$ et puis on applique le corollaire précédent.

Nous utiliserons le lemme suivant pour établir le caractère lipschitzien des coefficients (principaux) des équations quasi-linéaires.

Lemme 6.1.—Supposons

$$\begin{aligned} & 1 < p, \quad 1 \leq M, \quad n < (M-1)p, \\ & f \in V_{\infty, \infty}^{(1)}(X, Y), \quad y_v(x) \in W_p^{(M)}(X), \quad v = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} (6.1.1) \quad & \|f[x, y(x)], S\|_{\infty}^{(1)} \\ & \leq \|f, X \times Y\|_{\infty, \infty}^{(1)} [1 + C(M, p, S) \|D^M y, S\|_p]. \end{aligned}$$

Preuve. — On a

$$Df[x, y(x)] = f_x[x, y]|_{y=y(x)} + \sum_{v=1}^r f_{y_v}[x, y]|_{y=y(x)} Dy_v(x).$$

Il s'agit de prouver que $f[x, y(x)]$ est un élément de $V_{\infty}^{(1)}(X)$. On a

$$\begin{aligned} & \|f_x[x, y]|_{y=y(x)}, S\|_{\infty} \leq \|f, X \times Y\|_{\infty, \infty}^{(1)}, \\ & \|f_{y_v}[x, y]|_{y=y(x)}, S\|_{\infty} \leq \|f, X \times Y\|_{\infty, \infty}^{(1)}, \end{aligned}$$

et vu le Théorème 6.1 et l'hypothèse $n < (M-1)p$

$$\|Dy_v, S\|_{\infty} \leq C(M, p, S) \|D^M y_v, S\|_p;$$

d'où (6.1.1).

Nous utiliserons les majorations suivantes :

Lemme 6.2. — Sous les hypothèses, du Théorème 6.4, nous avons

$$\begin{aligned}
 (6.2.1) \quad & \int_T \|D^m f[x, y(x)], S(t)\|_p dt_1 \dots dt_{N-n} \\
 & \leq (\text{mes } T)^{1-1/p} C(m, Mp, S) \|D^m f, X \times Y\|_{p, \infty} \\
 & \quad \cdot (\sup_{t \in T} [1 + \|D^M y, S(t)\|_p]^m); \\
 (6.2.2) \quad & \left[\int_T (\|f[x, y(x)], S(t)\|_p^{(m)})^p dt_1 \dots dt_{N-n} \right]^{1/p} \\
 & \leq C(m, Mp, X) \|f, X \times Y\|_{p, \infty}^{(m)} (\sup_{t \in T} [1 + \|D^M y, S(t)\|_p]^m).
 \end{aligned}$$

Preuve. Le Théorème 6.4 et les formules (3.2) et (3.3) du N° 3.

Chapitre II

Normes et quasi-normes d'opérateurs différentiels

Afin d'améliorer la théorie de L. Gårding concernant les équations hyperboliques linéaires, nous définissons des espaces d'opérateurs différentiels qui peuvent être approchés, sur tout ensemble borné, par des opérateurs qu'utilise Gårding; et nous définissons des quasi-normes qui, majorées à l'aide des résultats du Chapitre I, permettent au Chapitre III d'obtenir, pour ces nouveaux opérateurs, les inégalités énergétiques de Gårding.

1. Notations. Désormais, X représentera toujours la bande $0 < x_1 < T$ de l'espace euclidien E , de dimension l ; $S = S(t) = S \times \{t\}$ désignera toujours l'hyperplan $x_1 = t$ ($\dim S = l - 1$).

Les normes et quasi-normes du N° 2, Chapitre I, si l'on fait $p = 2$ seront écrites

$$\|\dots, \dots\| \quad \text{au lieu de} \quad \|\dots, \dots\|_2.$$

Nous désignerons à l'avenir par $C(l)$ les fonctions $C(S)$ qui furent introduites au N° 6, Chapitre I.

2. Les espaces $\mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$. Donnons-nous deux entiers $m \geq 0$ et $\mu \geq 0$ et un ensemble

$$Q = (q_0, q_1, \dots, q_{m+1})$$

de nombres tels que

$$2 \leq q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_{m+1} \leq +\infty.$$

Notons

$$a = a(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m+1} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre $m+1$, dont les coefficients sont définis presque partout dans X . On appelle coefficients principaux de a les coefficients a_α où $|\alpha| = m+1$; on désigne par

$$h = h(x, D) = \sum_{|\alpha|=m+1} a_\alpha(x) D^\alpha$$

la partie principale de a .

Définition. $\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ désignera l'ensemble des opérateurs linéaires a d'ordres $\leq m+1$, dont les coefficients ont les propriétés suivantes :

1°) pour $|\alpha| = m+1$,

$$a_\alpha \in V_{q_{m+1}}^{(\mu)}(X) \cap V_\infty^{(1)}(X);$$

2°) pour $0 \leq |\alpha| \leq m$,

$$a_\alpha \in W_{q|\alpha|}^{(\mu)}(X).$$

Évidemment,

$$\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X) \subset \mathcal{V}_Q^{(\mu-1)}(X) \subset \dots \subset \mathcal{V}_Q^{(0)}(X).$$

Nous munissons l'espace vectoriel $\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ de la norme

$$\|h, X\|_\infty^{(1)} + \|a, X\|_Q^{(\mu)}$$

où

$$\|h, X\|_\infty^{(1)} = \sum_{|\alpha|=m+1} \|D^\alpha a_\alpha, X\|_\infty$$

et

$$\|a, X\|_Q^{(\mu)} = \sum_{|\alpha|=m+1} \|a_\alpha, X\|_{q_{m+1}}^{(\mu)} + \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^\alpha a_\alpha, X\|_{q|\alpha|}$$

$\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ est dès lors un espace de Banach.

La fonction de t

$$\|a, S(t)\|_Q^{(\mu)} = \sum_{|\alpha|=m+1} \|a_\alpha, S(t)\|_{q_{m+1}}^{(\mu)} + \sum_{\alpha=0}^m \|D^\mu a_\alpha, S(t)\|_{q_{|\alpha|}}$$

est définie pour presque toutes les valeurs de t ; c'est une *quasi-norme*, car elle vérifie les relations (2.1), (2.2) et (2.3) du N° 2, Chapitre I.

Cette quasi-norme est une fonction sommable ~~de~~^{sur} T ; plus précisément :

Lemme 2.1.

$$\int_0^T \|a, S(t)\|_Q^{(\mu)} dt \leq C(T, m, Q) \|a, X\|_Q^{(\mu)}.$$

Preuve. Si $|a| = m+1$, on a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|a_\alpha, S(t)\|_{q_{|\alpha|}}^{(\mu)} dt &= \int_0^T \|a_\alpha, S(t)\|_\infty dt + \int_0^t \|D^\mu a_\alpha, S(t)\|'_{q_{|\alpha|}} dt \\ &\leq T \|a_\alpha, X\|_\infty + T^{1-1/q_{|\alpha|}} \|D^\mu a_\alpha, X\|'_{q_{|\alpha|}} \\ &\leq C(T, q_{|\alpha|}) \|a_\alpha, X\|_{q_{|\alpha|}}^{(\mu)} \\ &\leq C(T, m, Q) \|a, X\|_Q^{(\mu)}. \end{aligned}$$

Si $|a| \leq m$, on a de même

$$\begin{aligned} \int_0^T \|D^\mu a_\alpha, S(t)\|_{q_{|\alpha|}} dt &\leq T^{1-1/q_{|\alpha|}} \|D^\mu a_\alpha, X\|_{q_{|\alpha|}} \\ &\leq C(T, m, Q) \|a, X\|_Q^{(\mu)}. \end{aligned}$$

Lemme 2.2. On a, pour toutes les valeurs de t et $\mu > 0$, l'inégalité

$$\|a, S\|_Q^{(\mu-1)} \leq C(\mu, Q, X) \|a, X\|_Q^{(\mu)}.$$

Preuve. Le Théorème 6.2, N° 6, Chapitre I.

Parmi les espaces $\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ signalons le cas particulier suivant :

Définition. $\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ désignera l'espace $\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ où l'on a choisi

$$2 \leq q_0 = q_1 = \dots = q_{m+1} = q \leq +\infty.$$

Nous noterons la norme et la quasi-norme: $\|\dots, \dots\|_q$.

Si $q = 2$, nous écrirons $\mathcal{V}^{(\mu)}(X, m+1)$ au lieu de $\mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$ et $\|\dots, \dots\|^{(1)}$ au lieu de $\|\dots, \dots\|_2^{(1)}$.

Note 1. Les opérateurs à coefficients constants sont un cas particulier de $\mathcal{V}_{\infty}^{(\mu)}(X, m+1)$.

Note 2. La théorie des équations quasi-linéaires utilisera les espaces $\mathcal{V}^{(\mu)}(X, m+1)$.

3. Les espaces $\mathcal{V}_{p,\infty}^{(\mu)}(X, Y, m+1)$.

Définition. Considérons l'ensemble $\mathcal{V}_{p,\infty}^{(\mu)}(X, Y, m+1)$ des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $m+1$:

$$a[x, y, D] = \sum_{|\alpha|=0}^{m+1} a_{\alpha}[x, y] D^{\alpha}$$

dont les coefficients a_{α} définis presque partout dans $X \times Y$ sont des éléments de

$$V_{p,\infty}^{(\mu)}(X, Y) \cap V_{\infty,\infty}^{(1)}(X, Y) \quad \text{pour } |\alpha| = m+1$$

et de

$$W_{p,\infty}^{(\mu)}(X, Y) \quad \text{pour } 0 \leq |\alpha| \leq m.$$

Nous munissons cet espace vectoriel de la norme

$$h, X \times Y \big|_{\infty,\infty}^{(1)} + \|a, X \times Y\|_{p,\infty}^{(\mu)}$$

où

$$\|h, X \times Y\|_{\infty,\infty}^{(1)} = \sum_{|\alpha|=m+1} \|a_{\alpha}, X \times Y\|_{\infty}^{(1)}$$

et

$$\|a, X \times Y\|_{p,\infty}^{(\mu)} = \sum_{|\alpha|=m+1} \|a_{\alpha}, X \times Y\|_{p,\infty}^{(\mu)} + \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^{\mu} a_{\alpha}, X \times Y\|_{p,\infty}.$$

C'est alors un espace de Banach.

La fonction de t

$$\|a, S(t) \times Y\|_{p,\infty}^{(\mu)} = \sum_{|\alpha|=m+1} \|a_{\alpha}, S(t) \times Y\|_{p,\infty}^{(\mu)} + \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^{\mu} a_{\alpha}, S(t) \times Y\|_{p,\infty}$$

est définie pour presque toutes les valeurs de t ; c'est une quasi-norme.

Lemme 3. — Supposons

$$\mu \leq M, \quad l - 1 < 2(M - 1),$$

$$a \in \mathcal{V}_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y; m + 1) \quad \text{et} \quad y_v \in W_2^{(M)}(X), \quad v = 1, \dots, r.$$

Alors, en substituant $y(x) = [y_1(x), \dots, y_r(x)]$ à y dans les coefficients $a_\alpha[x, y]$, on obtient un opérateur $a[x, y(x), D]$ dont la quasi-norme vérifie l'inégalité :

$$(3.1) \quad \|a[x, y(x), D], S\|^{(\mu)} \leq C(\mu, M, l) \|a[x, y, D], S \times Y\|_{2,\infty}^{(\mu)} [1 + \|D^M y, S\|]^\mu$$

et la partie principale vérifie

$$(3.2) \quad \|h[x, y(x), D], S\|_\infty^{(1)} \leq \|h, X \times Y\|_{\infty,\infty}^{(1)} [1 + C(M, l) \|D^M y, S\|];$$

d'où, si $\|D^M y, S\|$ a une borne indépendante de S ,

$$a[x, y(x), D] \in \mathcal{V}^{(\mu)}(X, m + 1).$$

Preuve. Le Théorème 6.4, N° 6, Chapitre I et le Lemme 6.1, N° 6, Chapitre I.

4. Majoration des opérateurs $a \in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m + 1)$ d'ordres $\leq m$ (c'est-à-dire à coefficients principaux nuls). (Les Lemmes 4.1 et 4.2 du N° 4, Chapitre III emploieront cette majoration).

Lemme 4. — Soit a un opérateur d'ordre $\leq m$ appartenant à $\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m + 1)$, $0 \leq \mu$. Supposons ($l = \dim X$, $q_\alpha = q_{|\alpha|}$)

$$l - 1 < (m + \mu - |\alpha|) q_\alpha \quad \text{pour} \quad 0 < m + \mu - |\alpha|$$

et

$$q_\alpha = +\infty \quad \text{pour} \quad m + \mu - |\alpha| = 0,$$

c'est-à-dire pour $\mu = 0$ et $|\alpha| = m$. Alors, pour presque toutes les valeurs de t ,

$$D^\mu a f, S \leq C(m, \mu, Q, l) \|a, S\|_Q^{(\mu)} \|D^{m+\mu} f, S\|.$$

Preuve. Appliquons à un terme de la forme $D^\beta a_\alpha D^{\alpha+\gamma-\beta} f$ où

$$|\alpha| \leq m, \quad |\beta| \leq \mu, \quad |\gamma| \leq \mu, \quad \beta \leq \gamma \quad (\text{c.à.d. } \beta_i \leq \gamma_i)$$

la formule (6.3.1) du Théorème 6.3, N° 6, Chapitre I, où l'on remplace α par β , β par $\alpha + \gamma - \beta$, m par μ , M par $m + \mu$, f par a_α , $\mathfrak{A}^q$ par f , p par 2, q par q_α et n par $l - 1$; il vient

$$\begin{aligned} & \| D^\beta a_\alpha D^{\alpha+\gamma-\beta} f, S \| \\ & \leq C(m, \mu, q_\alpha, l) \| D^\alpha a_\alpha, S \|_{q_\alpha} \| D^{m+\mu} f, S \| \end{aligned}$$

si

$$\frac{l-1}{q_\alpha} < (m + 2\mu - |\alpha| - |\gamma|),$$

donc, si

$$l - 1 < (m + \mu - |\alpha|) q_\alpha, \quad q_\alpha = +\infty \quad \text{pour} \quad |\alpha| = m, \quad \mu = 0;$$

d'où le lemme, vu l'inégalité de Minkowski.

5. Majoration des opérateurs $D^\gamma a - a D^\gamma$ (Le Lemme 4.2 du N° 4, Chapitre III emploiera cette majoration).

Ne supposons plus a d'ordre $\leq m$, mais à nouveau d'ordre $\leq m + 1$.

Lemme 5. — Soit

$$a \in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m + 1).$$

Supposons $|\gamma| \leq \mu$

$$l - 1 < (m + \mu - |\alpha|) q_\alpha \quad \text{pour} \quad 0 < m + \mu - |\alpha|$$

et $q_\alpha = +\infty$ pour $m + \mu - |\alpha| \leq 0$, c'est-à-dire pour les couples

$$(\mu, |\alpha|) = (1, m + 1), (0, m + 1) \quad \text{et} \quad (0, m).$$

Alors, on a, pour presque toutes les valeurs de t ,

$$\| D^\gamma a f - a D^\gamma f, S \| \leq C(m, \mu, Q, l) \| a, S \|_Q^{(\mu)} \| D^{m+\mu} f, S \|.$$

Preuve. D'après la formule de Leibniz de la dérivée d'un produit

$$D^\gamma a f - a D^\gamma f = \sum_{\alpha, \beta} \left(\prod_{i=1}^t \frac{\gamma_i!}{\beta_i! (\gamma_i - \beta_i)!} \right) (D^\beta a_\alpha) (D^{\alpha+\gamma-\beta} f),$$

où le couple (α, β) parcourt l'ensemble des valeurs telles que

$$0 \leq |\alpha| \leq m + 1, \quad 0 < |\beta|, \quad \beta \leq \gamma \quad (\text{c.à.d. } \beta_i \leq \gamma_i).$$

Il s'agit donc de prouver que, pour $|\alpha| = m + 1$,

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & \| (D^\beta a_\alpha) (D^{\alpha+\gamma-\beta} f), S \| \\ & \leq C(m, \mu, q_\alpha, l) \| a_\alpha, S \|_{q_\alpha}^{(\mu)} \cdot \| D^{m+\mu} f, S \|; \end{aligned}$$

et pour $0 \leq |\alpha| \leq m$,

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \| (D^\beta a_\alpha) (D^{\alpha+\gamma-\beta} f), S \| \\ & \leq C(m, \mu, q_\alpha, l) \| D^\mu a_\alpha, S \|_{q_\alpha} \cdot \| D^{m+\mu} f, S \|; \end{aligned}$$

on a

$$0 < |\beta| \leq \mu \quad \text{et} \quad |\alpha + \gamma - \beta| \leq m + \mu$$

puisque $0 < |\beta|$. Si $q_\alpha = +\infty$, les inégalités (5.1) et (5.2) sont évidentes. Supposons $q_\alpha < +\infty$. Les formules (6.3.2) et (6.3.1) du Théorème 6.3, N° 6, Chapitre I s'appliquent, en remplaçant α par β , m par μ , β par $\alpha + \gamma - \beta$, M par $m + \mu$, f par a_α et g par f . On obtient les inégalités (5.1) et (5.2) si

$$l - 1 < (m + 2\mu - |\alpha| - |\gamma|) q_\alpha \quad \text{pour tout} \quad |\gamma| \leq \mu,$$

donc, si

$$l - 1 < m + \mu - |\alpha| q_\alpha.$$

6. Division de a par le coefficient de D_1^{m+1} .

Lemme 6. — Soit

$$a \in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m + 1).$$

Supposons

$$l - 1 < (m + \mu - |\alpha|) q_\alpha \quad \text{pour} \quad 0 < m + \mu - |\alpha|$$

et

$$q_\alpha = +\infty \quad \text{pour} \quad m + \mu - |\alpha| \leq 0.$$

Supposons le coefficient de D_1^{m+1} borné inférieurement en module par une constante $c > 0$.⁽²⁾ Alors, si on divise a par le coefficient de D_1^{m+1} , on obtient un opérateur appartenant à $\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m + 1)$.

2. a régulièrement hyperbolique et $\mathcal{S}: x_1 = t$ régulièrement spatial impliquent cette hypothèse (v. Chapitre III, N° 1).

Preuve. Soit $a_1(x)$ le coefficient de D_1^{m+1}

$$a_1 \in V_{q_{m+1}}^{(\mu)}(X) \cap V_{\infty}^{(1)}(X).$$

Il est évident que

$$1/a_1 \in V_{\infty}^{(1)}(X) \quad \text{et} \quad a_{\alpha}/a_1 \in V_{\infty}^{(1)}(X) \quad \text{pour} \quad |\alpha| = m + 1.$$

Le lemme est évident, si $q_{m+1} = +\infty$. Supposons

$$q_{m+1} < +\infty$$

et prouvons que

$$a_{\alpha}/a_1 \in V_{q_{m+1}}^{(\mu)}(X) \quad \text{pour} \quad |\alpha| = m + 1$$

et

$$a_{\alpha}/a_1 \in W_{q_{\alpha}}^{(\mu)}(X) \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq m.$$

Les relations

$$l - 1 < q_{m+1}(\mu - 1), \quad 2 \leq q_{m+1},$$

impliquent que

$$(6.1) \quad l < \mu q_{m+1}.$$

Notons Y un ouvert de R ne contenant pas $[-c, c]$ et posons

$$F^{0,j} = \sup_{y \in Y} \sum_{|\gamma|=j} |D_y^{\gamma} 1/y| < +\infty$$

pour tout $j \leq \mu$; on a

$$1/y \in V_{q_{m+1}, \infty}^{(\mu)}(X, Y).$$

Vu le Théorème 6.4, N° 6, Chapitre I et compte tenu de (6.1),

$$1/a_1 \in V_{q_{m+1}}^{(\mu)}(X).$$

Pour $|\alpha| = m + 1$, on a, vu la relation (6.3.13) du Corollaire 2, Théorème 6.3, N° 6, Chapitre I, et compte tenu de (6.1),

$$a_{\alpha}/a_1 \in V_{q_{m+1}}^{(\mu)}(X).$$

Pour $|\alpha| \leq m$, on a, vu le même corollaire (6.3.12)

$$a_{\alpha}/a_1 \in W_{q_{\alpha}}^{(\mu)}(X).$$

Le lemme est démontré.

7. Approximation des opérateurs $\in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ par des opérateurs $\in \mathcal{V}_\infty^{(\mu+1)}(X, m+1)$.

Il s'agit d'une approximation au sens de la convergence forte locale ; nous la construirons par convolution ; rappelons les définitions de ces notions.

Définition. La suite $f_p \rightarrow f$ fortement localement sur X , si, pour tout ensemble borné et mesurable $\Omega \subset X$, on a

$$\int_{\Omega} |f_p - f|^2 dx_1 \dots dx_l \rightarrow 0$$

quand $p \rightarrow +\infty$.

$D^m f_p \rightarrow D^m f$ fortement localement sur X , si $D^\alpha f_p \rightarrow D^\alpha f$ fortement localement sur X , pour $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Définition. Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle > 0 , indéfiniment dérivable telle que

$$\int_E \varphi(x) dx_1 \dots dx_l = 1$$

et de support compris dans la demi-boule $|x| < 1, x_1 < 0$.

Soit

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-l} \varphi(\varepsilon^{-1}x), \quad 0 < \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Le support de $\varphi_\varepsilon(x)$ est donc compris dans $|x| < \varepsilon, x_1 < 0$ et

$$\int_E \varphi_\varepsilon(x) dx_1 dx_2 \dots dx_l = 1, \quad \varphi_\varepsilon(x) > 0.$$

Soit $g \in L_q(X)$, $1 \leq q \leq +\infty$. Le produit de convolution $g * \varphi_\varepsilon$ est défini par la formule

$$g * \varphi_\varepsilon = \int_E g(x-y) \varphi_\varepsilon(y) dy_1 \dots dy_l.$$

$D^\alpha(g * \varphi_\varepsilon) = (D^\alpha g) * \varphi_\varepsilon$ sera noté $D^\alpha g * \varphi_\varepsilon$.

Pour prouver que les opérateurs $\in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ peuvent être approchés, au sens de la convergence forte locale, par des opérateurs $\in \mathcal{V}_\infty^{(\mu+1)}(X, m+1)$ et que leurs normes sont limites des suites des normes des opérateurs approximants, nous utiliserons le théorème classique que voici (v. Sobolev [16]) :

Théorème 7.1. — Soit Ω un compact dans X et soient Ω_ε l'ensemble des points de Ω situés à une distance au plus égale à ε , $\varepsilon > 0$, du bord de Ω et X_ε l'ensemble des points de X situés à une distance au plus égale à ε de l'hyperplan $S(T) : x_1 = T$. Alors, si $f \in L_2(\Omega)$

$$(7.1.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f, \Omega - \Omega_\varepsilon\| = 0.$$

Si $f \in L_p(X)$, ($1 \leq p \leq +\infty$), alors,

$$(7.1.2) \quad \|f * \varphi_\varepsilon, X - X_\varepsilon\|_p \rightarrow \|f, X\|_p.$$

Note. On a même

$$(7.1.3) \quad \|f * \varphi_\varepsilon, X - X_\varepsilon\|_p \leq \|f, X\|_p;$$

$$(7.1.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f, X - X_\varepsilon\|_p = 0, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Théorème 7.2. — Hypothèses :

$$a \in \mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$$

$$l-1 < (m+\mu-|\alpha|)q_\alpha \quad \text{pour} \quad 0 < m+\mu-|\alpha|,$$

$$q_\alpha = +\infty \quad \text{pour} \quad m+\mu-|\alpha| \leq 0.$$

Posons,

$$a_{\alpha, \varepsilon} = a_\alpha * \varphi_\varepsilon,$$

$$a_\varepsilon = a_\varepsilon(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m+1} a_{\alpha, \varepsilon} D^\alpha,$$

$$h_\varepsilon = \sum_{|\alpha|=m+1} a_{\alpha, \varepsilon} D^\alpha.$$

Conclusion. Les opérateurs

$$a_\varepsilon \in \mathcal{V}_\infty^{(\mu+1)}(X, m+1)$$

sont tels que

- 1) pour tous les α , $D^\mu a_{\alpha, \varepsilon} \rightarrow D^\mu a_\alpha$ fortement localement sur X , quand $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 2) pour $|\alpha| = m+1$, $a_{\alpha, \varepsilon} \rightarrow a_\alpha$ uniformément sur $X - X_\varepsilon$; de plus pour tout μ (même $\mu=0$), $D^1 a_\alpha * \varphi_\varepsilon \rightarrow D^1 a_\alpha$ fortement localement sur X ;

$$3) \quad \|a_\varepsilon, X - X_\varepsilon\|_Q^{(\mu)} \rightarrow \|a, X\|_Q^{(\mu)};$$

$$\|h_\varepsilon, X - X_\varepsilon\|_\infty^{(1)} \rightarrow \|h, X\|_\infty^{(1)}.$$

Preuve de 1) et 3). — Considérons le produit de convolution :

$$a_\alpha * \varphi_\varepsilon \in W_\infty^{(\mu+1)}(X), \quad |\alpha| \leq m+1.$$

Vu le Théorème 7.1, nous avons pour tout α et tout Ω compact dans X ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^\mu a_\alpha * \varphi_\varepsilon - D^\mu a_\alpha, \Omega - \Omega_\varepsilon\| = 0,$$

(pour $|\alpha| = m+1$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^1 a_\alpha * \varphi_\varepsilon - D^1 a_\alpha, \Omega - \Omega_\varepsilon\| = 0);$$

de plus, pour $|\alpha| \leq m$,

$$\|D^\mu a_\alpha * \varphi_\varepsilon, X - X_\varepsilon\|_{q_\alpha} \rightarrow \|D^\mu a_\alpha, X\|_{q_\alpha},$$

et pour $|\alpha| = m+1$;

$$\|a_\alpha * \varphi_\varepsilon, X - X_\varepsilon\|_{q_{m+1}}^{(\mu)} \rightarrow \|a_\alpha, X\|_{q_{m+1}}^{(\mu)},$$

ce qui prouve 1) et 3).

Preuve de 2. Les coefficients principaux sont uniformément continus sur X , car $a_\alpha \in W_\infty^{(1)}(X)$; d'où la convergence uniforme de $a_{\alpha,\varepsilon} \rightarrow a_\alpha$, $|\alpha| = m+1$.

Deuxième partie

INVERSES D'OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES DU TYPE DE SOBOLEV

Dans cette partie,

- 1) X représentera toujours la bande $0 < x_1 < T$ de l'espace euclidien E de dimension l , et B la bande partielle $0 < x_1 < t, t < T$;
- 2) $a = a(x, D)$ désignera toujours un opérateur régulièrement hyperbolique pour tout $x \in X$ et $S = S(t) : x_1 = t$ un hyperplan régulièrement spatial de caractère χ_0 pour tout $x \in X$;

- 3) $a[x, y, D]$ désignera toujours un opérateur régulièrement hyperbolique pour tout $(x, y) \in X \times Y$ et S , un hyperplan régulièrement spatial de caractère χ_0 pour tout $(x, y) \in X \times Y$ (v. Ch. III, N° 1).

Chapitre III

Équations hyperboliques linéaires : inégalités énergétiques et théorèmes d'unicité

Après avoir rappelé les notions d'opérateur hyperbolique et d'hyperplan spatial, nous énonçons les principaux résultats de la théorie de Gårding concernant les équations linéaires hyperboliques. Les résultats de la première partie permettent de compléter cette théorie; c'est ce qui est fait dans ce chapitre et le suivant: les inégalités énergétiques de Gårding et l'unicité de la solution du problème de Cauchy sont établies sous des hypothèses plus larges que celles utilisées par Gårding.

1. Opérateur hyperbolique et hyperplan spatial.

Soit

$$a = a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m+1} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre $m+1$ dont les coefficients sont des fonctions définies sur X . On désigne par

$$h = h(x, D) = \sum_{\alpha = m+1} a_\alpha(x) D^\alpha$$

la partie principale de a .

Définition. On dit que $a(x, \xi)$ est hyperbolique sur X , si pour tout $x \in X$, il existe, x étant fixé, des points ⁽³⁾ $\xi \in E^*$ ⁽⁴⁾ tels que toute droite passant par ξ sans passer par l'origine de E^* coupe le cône algébrique $h(x, \xi) = 0$ en $m+1$ points réels et distincts. La direction de l'hyperplan

3. Ces points constituent deux demi-cônes convexes opposés par le sommet.

4. E^* est le dual de E considéré comme espace vectoriel.

$$\xi \cdot x = \xi_1 \cdot x_1 + \xi_2 \cdot x_2 + \dots + \xi_l \cdot x_l = 0$$

est alors dite spatiale.

Exemple. L'hyperplan

$$x_1 = C,$$

C étant une constante, est spatial si l'équation en ξ_1 :

$$h(x, \xi) = 0$$

a $m+1$ racines $\xi_{1,j}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_l, x)$, $j = 1, 2, \dots, m+1$, réelles et distinctes pour

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 + \dots + \xi_l^2 \neq 0.$$

Définition. L'hyperplan

$$S: x_1 = t$$

est régulièrement spatial, s'il existe une constante $\chi_0 > 0$ telle que, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} & |\xi_{1,j}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_l, x_1, \dots, x_l) - \xi_{1,i}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_l, x_1, \dots, x_l)| \\ & > \chi_0 \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 + \dots + \xi_l^2}, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

χ_0 est dit caractère de régularité spatiale de S . L'hypothèse que S est régulièrement spatial implique que a est régulièrement hyperbolique, c'est-à-dire que les limites du cône $h(x, \xi) = 0$ sont sans singularité réelle, quand

$$|x| \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{|x_1| \rightarrow +\infty} h(x, \xi) \neq 0.$$

2. Hypothèse de régularité.

Soit $a \in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$. Nous imposerons souvent à $\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ de vérifier l'hypothèse suivante :

$$l-1 < (m+\mu-|\alpha|)q_\alpha \quad \text{pour} \quad 0 < m+\mu-|\alpha|,$$

et

$$q_\alpha = +\infty \quad \text{pour} \quad m+\mu-|\alpha| \leq 0 \quad \text{c.à.d.}$$

pour les couples

$$(\mu, |\alpha|) = (1, m+1), (0, m+1), (0, m).$$

Nous dirons alors que a satisfait à l'hypothèse de régularité.

Cette hypothèse est essentielle, dans la plupart des cas, à la majoration des quasi-normes.

3. Théorie de Gårding: inégalités énergétiques et théorème d'existence pour $a \in \mathcal{V}_\infty^{(\mu)}(X, m+1)$.

Nous ne rappelons de la théorie de Gårding que les résultats que nous utilisons.

Posons

$$\chi(a, B) = \sup_{x \in B} [1/a_1, 1/\chi_0]$$

où a_1 représente le coefficient de D_1^{m+1} de a .

Inégalité énergétique fondamentale. Supposons

$$a \in \mathcal{V}_\infty^{(0)}(X, m+1) \quad \text{et} \quad f \in W_2^{(m+1)}(X).$$

Alors, on a l'inégalité qui minore a ,

$$(3.1) \quad \|D^m f, S\| \leq C \int_0^t \|af, S(t')\| dt' + C \|D^m f, S_0\|,$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h, B\|_\infty^{(1)}; \|a, B\|_\infty^{(0)}, \|h, S_0\|_\infty^{(1)}, \chi(a, B))$$

indépendantes de $\|h, B\|_\infty^{(1)}$ pour $t=0$.

Exemple. Si a est l'opérateur des ondes

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

et u la solution de l'équation

$$\square u = v$$

alors l'inégalité énergétique est l'inégalité énergétique classique

$$\begin{aligned} & \int_S \left[\sum_{j=1}^4 \left(-\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx_2 dx_3 dx_4 \\ & \leq C \left[\int_0^t \|v, S(t')\| dt' + \int_{S_0} \left[\sum_{j=1}^4 \left(-\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx_2 dx_3 dx_4 \right] \end{aligned}$$

où C est une constante.

Toute inégalité du type (3.1) englobant cette dernière inégalité est dite inégalité énergétique du type hyperbolique.

Inégalité énergétique générale. — Supposons

$$0 \leq \mu, \quad a \in \mathcal{V}_{\infty}^{(\mu)}(X, m+1) \quad \text{et} \quad f \in W_2^{(m+\mu+1)}(X), \quad af = g \in W_2^{(\mu)}(X).$$

Alors

$$\begin{aligned} \|D^{m+\mu} f, S\| &= C \int_0^t \|D^{\mu} g, S(t')\| dt' + C \|D^{\mu-1} g, S_0\| \\ &\quad + C \|D^{m+\mu} f, S_0\| \end{aligned}$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h, B\|_{\infty}^{(1)} + \|a, B\|_{\infty}^{(\mu)}; \|h, B\|_{\infty}^{(0)}, \|h, S_0\|_{\infty}^{(1)}, \chi(a, B))$$

indépendantes de $\|h, B\|_{\infty}^{(1)} + \|a, B\|_{\infty}^{(\mu)}$ pour $t = 0$.

Si $\mu = 0$, $D^{\mu-1} = 0$.

Théorème d'existence. Supposons

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu, \quad a \in \mathcal{V}_{\infty}^{(\mu)}(X, m+1) \\ v \in W_2^{(\mu)}(X) \quad \text{et} \quad w \in W_2^{(m+\mu+1)}(B). \end{aligned}$$

Alors, l'équation

$$au = v$$

possède au moins une solution

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(X)$$

vérifiant l'inégalité énergétique

$$\begin{aligned} \|D^{m+\mu} u, S\| &\leq C \int_0^t \|D^{\mu} v, S(t')\| dt' + C \|D^{\mu-1} v, S_0\| \\ &\quad + C \|D^{m+\mu} w, S_0\| \end{aligned}$$

et les données de Cauchy

$$D^m u = D^m w \quad \text{sur} \quad S_0.$$

Voici un lemme utilisé par Gårding [8], qui servira à établir que les inégalités énergétiques valent pour tout opérateur appartenant à $\mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$.

Lemme 3. Soient $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ et $\rho(t)$ quatre fonctions non négatives définies dans l'intervalle $0 \leq t \leq T$. Supposons $\vartheta(t)$ et $\varphi(t)$ croissantes. Alors, il résulte de l'inégalité

$$\rho(t) \leq \vartheta(t) \left[\int_0^t \psi(t') \rho(t') dt' + \varphi(t) \right]$$

que

$$\rho(t) \leq \varphi(t) \vartheta(t) \exp \vartheta(t) \int_0^t \psi(t') dt'.$$

4. Inégalités énergétiques du type hyperbolique.

Lemme 4.1. (inégalité énergétique fondamentale). Supposons $a \in \mathcal{V}_Q^{(0)}(X, m+1)$ et satisfaisant à l'hypothèse de régularité $(N^\circ 2)$,

$$f \in W_2^{(m+1)}(X).$$

Alors, on a pour toutes les valeurs de t ,

$$\|D^m f, S\| \leq C \int_0^t \|af, S(t')\| dt' + C \|D^m f, S_0\|$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h, B\|_\infty^{(1)} + \|a, B\|_Q^{(0)}; \|h, B\|_\infty^{(0)}, \|h, S_0\|_\infty^{(1)}, \chi(a, B)),$$

indépendantes de $\|h, B\|_\infty^{(1)} + \|a, B\|_Q^{(0)}$ pour $t=0$.

Preuve. La partie principale h de a vérifie l'inégalité énergétique fondamentale de Gårding (3.1), $N^\circ 3$, on a donc

$$(4.1.1) \quad \|D^m f, S\| \leq C_1 \int_0^t \|hf, S(t')\| dt' + C_1 \|D^m f, S_0\|$$

où les C_1 sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h, B\|_\infty^{(1)}; \|h, B\|_\infty^{(0)}, \|h, S_0\|_\infty^{(1)}, \chi(a, B)),$$

indépendantes de $\|h, B\|_\infty^{(1)}$ pour $t=0$.

Écrivons

$$hf = af - \sum_{\alpha=0}^m a_{\alpha} D^{\alpha} f ;$$

donc, vu le Lemme 4, N° 4, Chapitre II,

$$\| hf, S \| \leq \| af, S \| + C_0(m, Q, l) \| a - h, S \|_Q^{(0)} \| D^m f, S \|.$$

En portant ceci dans (4.1.1) on obtient

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} \| D^m f, S \| &\leq C_1 \int_0^t \| a, S(t') \|_Q^{(0)} \| D^m f, S(t') \| dt' \\ &\leq C_1 \int_0^t \| af, S(t') \| dt' + C_1 \| D^m f, S_0 \| . \end{aligned}$$

L'inégalité (4.1.2) entraîne, d'après le Lemme 3, que

$$\| D^m f, S \| \leq C_2 \int_0^t \| af, S(t') \|_Q^{(0)} dt' + C_2 \| D^m f, S_0 \|\quad ,$$

où les C_2 , compte tenu du Lemme 2.1, N° 2 Chapitre II, sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \| h, B \|_{\infty}^{(1)} + \| a, B \|_Q^{(0)} ; \| h, B \|_{\infty}^{(0)}, \| h, S_0 \|_{\infty}^{(1)}, \chi(a, B)) ,$$

indépendantes de $\| h, B \|_{\infty}^{(1)} + \| a, B \|_Q^{(0)}$ pour $t = 0$.

Notation. Désignons dans le lemme suivant par $D^{p,q}$ l'ensemble des D^{α} tels que

$$\alpha_1 \leq p \quad \text{et} \quad \alpha \leq p + q ,$$

D^{α} est alors dit d'ordre $[\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_l]$. Ces ordres s'additionnent comme suit :

$$[p, q] + [r, s] = [p + r, q + s] .$$

Lemme 4.2 (inégalité énergétique générale). Supposons

$$0 \leq \mu, \quad a \in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$$

et satisfaisant à l'hypothèse de régularité,

$$f \in W_2^{(m+\mu+1)}(X) , \quad af = g \in W_2^{(\mu)}(X) .$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|D^{m+\mu} f, S\| \leq C \int_0^t \|D^\mu g, S(t')\| dt' + CC_0 \|D^{\mu-1} g, S_0\| \\ + CC_0 \|D^{m,\mu} f, S_0\| \end{aligned}$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h, B\|_\infty^{(1)} + \|a, B\|_Q^{(\mu)}; \|h, B\|_\infty^{(0)}, \|h, S_0\|_\infty^{(1)}, \chi(a, B))$$

indépendantes de $\|h, B\|_\infty^{(1)} + \|a, B\|_Q^{(\mu)}$ pour $t=0$ et les C_0 sont des fonctions continues et croissantes de $\|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)}$.

Note 1. On a d'une façon plus précise, pour $v \leq \mu$,

$$\begin{aligned} \|D^{m+v} f, S\| \leq C \int_0^t \|D^v g, S(t')\| dt' + CC_0 \|D^{v-1} g, S_0\| \\ + CC_0 \|D^{m,v} f, S_0\|; \end{aligned}$$

de plus on pourrait permettre un plus grand choix des q_α en remplaçant dans ce cas $v \leq \mu$, l'hypothèse

$$l-1 < (m+\mu-|\alpha|)q_\alpha$$

par l'hypothèse

$$l-1 < (m+2\mu-v-|\alpha|)q_\alpha$$

(voir la preuve du Lemme 5, N° 5, Chapitre II).

Note 2. Pour $\mu=0$, ce lemme s'identifie au Lemme 4.1. Dans la preuve qui suit, nous supposons $0 < \mu$.

Preuve. Vu que

$$\mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1) \subset \mathcal{V}_Q^{(0)}(X, m+1)$$

la partie principale h de a vérifie l'inégalité énergétique fondamentale de Gårding (3.1), N° 3; on a donc, après avoir remplacé dans cette inégalité f par $D^\mu f$,

$$\|D^{m+\mu} f, S\| \leq C_1 \int_0^t \|h D^\mu f, S(t')\| dt' + C_1 \|D^{m+\mu} f, S_0\|$$

où les C_1 sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h, B\|_{\infty}^{(1)}; \|h, B\|_{\infty}^{(0)}, \|h, S_0\|_{\infty}^{(1)}, \chi(a, B))$$

indépendantes de $\|h, B\|_{\infty}^{(1)}$ pour $t = 0$.

Vu le Lemme 5, N° 5, Chapitre II, qui majore

$$\|hD^{\mu}f - D^{\mu}hf, S\|,$$

on a donc

$$\begin{aligned} \|D^{m+\mu}f, S\| &\leq C_1 C(m, \mu, Q, l) \int_0^t \|h, S(t')\|_{Q^{(\mu)}}^{(\mu)} \|D^{m+\mu}f, S(t')\| dt' \\ &\quad + C_1 \int_0^t \|D^{\mu}hf, S(t')\| dt' + C_1 \|D^{m+\mu}f, S_0\|. \end{aligned}$$

Écrivons

$$hf = af - \sum_{|\alpha|=0}^m a_{\alpha} D^{\alpha} f;$$

donc, vu le Lemme 4, N° 4, Chapitre II,

$$\|D^{\mu}hf, S\| \leq \|D^{\mu}af, S\| + C_2(m, \mu, Q, l) \|a - h, S\|_{Q^{(\mu)}}^{(\mu)} \|D^{m+\mu}f, S\|.$$

Portons cette inégalité dans la précédente; il vient

$$\begin{aligned} \|D^{m+\mu}f, S\| &\leq C_3 \int_0^t \|a, S(t')\|_{Q^{(\mu)}}^{(\mu)} \|D^{m+\mu}f, S(t')\| dt' \\ &\quad + C_1 \int_0^t \|D^{\mu}af, S(t')\| dt' + C_1 \|D^{m+\mu}f, S_0\|, \end{aligned}$$

vu le Lemme 3 de ce chapitre et le Lemme 2.1, N° 2, Chapitre II, on a donc

$$(4.2.1) \quad \|D^{m+\mu}f, S\| \leq C \int_0^t \|D^{\mu}af, S(t')\| dt' + C \|D^{m+\mu}f, S_0\|$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h, B\|_{\infty}^{(1)} + \|a, B\|_{Q^{(\mu)}}^{(\mu)}; \|h, B\|_{\infty}^{(0)}, \|h, S_0\|_{\infty}^{(1)}, \chi(a, B))$$

indépendantes de $\|h, B\|_{\infty}^{(1)} + \|a, B\|_{Q^{(\mu)}}^{(\mu)}$ pour $t = 0$.

Supposons le coefficient de D_1^{m+1} dans a égal à 1, ce que permet le Lemme 6, N° 6, Chapitre II. On sait que les valeurs de $D^m f$ sur S_0 et la relation

$$(4.2.2) \quad D_1^{m+1} f = g - \sum_{\alpha \neq (m+1, 0, \dots, 0)} a_\alpha(x) D^\alpha$$

déterminent d'une façon unique les restrictions à l'hyperplan S_0 des dérivées $D^{m+\mu} f$; ces restrictions sont définies, car $f \in W_2^{(m+\mu+1)}(X)$.

On peut donc calculer les composantes de $D^{m+\mu} f$ sur S_0 à partir de (4.2.2) et des restrictions des composantes de $D^m f$ à S_0 ; explicitons ce calcul.

Écrivons (4.2.2) sous la forme

$$(4.2.3) \quad D_1^{m+1} f = g + a' f$$

où

$$a' = - \sum_{\alpha_1 < m+1} a_\alpha(x) D^\alpha$$

est un opérateur d'ordre $[m, 1]$.

Supposons $0 < |\gamma| \leq \mu - 1$ et D^γ d'ordre $\leq [r, s]$, $0 < r+s \leq \mu - 1$.

Appliquons D^γ à (4.2.3); il vient

$$(4.2.4) \quad D_1^{m+1} D^\gamma f = D^\gamma g + (D^\gamma a' - a' D^\gamma) f + a' D^\gamma f$$

où $D^\gamma a' - a' D^\gamma$ est un opérateur d'ordre $\leq [m+r, s]$.

Vu que $|\gamma| \leq \mu - 1$, les restrictions des différents coefficients de (4.2.4) à l'hyperplan S_0 sont définies et le Lemme 5, N° 5, Chapitre II, vaut pour $t = 0$. On a donc

$$(4.2.5) \quad \|D^\gamma a' f - a' D^\gamma f, S_0\| \leq C(m, \mu, Q, l) \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \|D^{m+r+s} f, S_0\|.$$

D'autre part, montrons que

$$(4.2.6) \quad \|a' D^\gamma f, S_0\| \leq \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \|D^{m+r, s+1} f, S_0\| + C(m, Q, l) \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \|D^{m+r+s} f, S_0\|.$$

En effet, pour $|\alpha| = m+1$,

$$\|a_\alpha, S_0\|_\infty \leq \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)};$$

on a donc

$$\left\| \sum_{\substack{\alpha_1 = m+1 \\ \alpha_1 \leq m}} a_\alpha(x) D^{\alpha+\gamma} f, S_0 \right\| \leq \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \|D^{m+r, s+1} f, S_0\|;$$

pour $|\alpha| \leq m$, on a, vu le Lemme 4, N° 4, Chapitre II,

$$\left\| \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(x) D^{\alpha+\gamma} f, S_0 \right\| \leq C(m, Q, l) \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \|D^{m+r+s} f, S_0\|$$

d'où 4.2.6.

De (4.2.4), (4.2.5) et (4.2.6) résulte la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|D^{m+r+1, s} f, S_0\| &\leq \|D^{r, s} g, S_0\| + \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \|D^{m+r, s+1} f, S_0\| \\ &\quad + C(m, \mu, Q, l) \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \|D^{m+r+s} f, S_0\|. \end{aligned}$$

D'où, par récurrence sur r ,

$$\begin{aligned} \|D^{m+\mu} f, S_0\| &\leq C(a) \|D^{\mu-1} g, S_0\| + C(a) \|D^{m, \mu} f, S_0\| \\ &\quad + C(a) \|D^{m+\mu-1} f, S_0\| \end{aligned}$$

et par récurrence sur μ ,

$$(4.2.7) \quad \|D^{m+\mu} f, S_0\| \leq C(a) \|D^{\mu-1} g, S_0\| + C(a) \|D^{m, \mu} f, S_0\|$$

où les $C(a)$ sont des fonctions continues de $\|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)}$.

Le lemme résulte des relations (4.2.1) et (4.2.7).

5. Théorème d'unicité. Supposons $0 \leq \mu$, $a \in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ et satisfaisant à l'hypothèse de régularité

$$f \in W_2^{(m+1)}(X), \quad af = 0 \text{ sur } X \text{ et } D^m f = 0 \text{ sur } S_0.$$

Alors,

$$f = 0 \text{ sur } X.$$

Preuve. La relation énergétique fondamentale.

Chapitre IV
ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES LINÉAIRES :
THÉORÈMES DE FAIBLE COMPACITÉ ET D'EXISTENCE

1. Préliminaires. Dans ce numéro, nous rappelons les définitions et les principales propriétés de la convergence forte et de la convergence faible.

Soient f_p et f des fonctions localement de carré sommable sur X . Toutes les fonctions considérées sont numériques.

Définition. Convergence forte. On dit que f_p converge fortement vers f sur X et l'on écrit

$$f_p \rightarrow f \text{ fortement sur } X$$

si

$$\int_X |f_p - f|^2 dx_1 \dots dx_l \rightarrow 0$$

lorsque $p \rightarrow \infty$.

$D^m f_p \rightarrow D^m f$ fortement sur X , si $D^\alpha f_p \rightarrow D^\alpha f$ fortement sur X pour $0 \leq |\alpha| \leq m$.

La convergence forte locale a été définie au N° 7, Ch. II.

Définition. Convergence faible. On dit que f_p converge faiblement vers f sur X et l'on écrit

$$f_p \rightarrow f \text{ faiblement sur } X$$

si l'ensemble des nombres

$$\int_X |f_p|^2 dx_1 \dots dx_l$$

est borné et si

$$\int_X \psi f_p dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_X \psi f dx_1 \dots dx_l$$

pour toute fonction ψ régulière à support compact dans X .

$D^m f_p \rightarrow D^m f$ faiblement sur X , si $D^\alpha f_p \rightarrow D^\alpha f$ faiblement sur X pour $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Voici trois propositions se rapportant à la convergence faible.

Proposition 1.1 (F. Riesz). Soit une suite de fonctions f_p définies dans X et telles que l'ensemble des nombres

$$\int_X \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f_p|^2 dx_1 \dots dx_l$$

soit borné; on peut alors extraire de la suite f_p une suite f_q telle que $D^m f_q$ converge faiblement sur X .

Proposition 1.2 (F. Riesz). Si la suite des fonctions a_p converge fortement localement vers a sur X et f_p converge faiblement vers f sur X , alors

$$\int_X \psi a_p f_p dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_X \psi a f dx_1 \dots dx_l$$

pour toute fonction ψ régulière à support compact.

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} & \left| \int_X \psi (af - a_p f_p) dx_1 \dots dx_l \right| \\ & \leq \left| \int_X \psi (a - a_p) f_p dx_1 \dots dx_l \right| + \left| \int_X \psi a (f - f_p) dx_1 \dots dx_l \right| \\ & \leq \left[\int_{\text{support de } \psi} |a - a_p|^2 dx_1 \dots dx_l \right]^{1/2} \left[\int_X |\psi f_p|^2 dx_1 \dots dx_l \right]^{1/2} \\ & + \left| \int_X \psi a (f - f_p) dx_1 \dots dx_l \right|. \end{aligned}$$

Ce dernier membre tend vers zéro, lorsque $p \rightarrow \infty$; d'où la proposition.

Proposition 1.3 (F. Riesz). Si f_p et $f \in W_2^{(m)}(X)$ et $D^m f_p$ converge faiblement vers $D^m f$ sur X , alors,

$$\|D^m f, X\| \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \|D^m f_p, X\|.$$

Proposition 1.4. Si $Df_p \rightarrow Df$ fortement (ou fortement localement) [ou faiblement] sur B ou $X - B$, alors, $f_p \rightarrow f$ fortement (ou fortement localement) [ou faiblement] sur S .

Preuve. On emploie le Théorème 6,2, N° 6, Chapitre I.

2. Théorème de compacité.

Théorème 2.1. Hypothèses:

$$0 \leq \mu, \quad a_p(x, D) \quad \text{et} \quad a(x, D) \in \mathcal{V}_0^{(\mu)}(X, m+1)$$

et satisfaisant à l'hypothèse de régularité:

$$\text{les suites des nombres} \quad a_p, \quad B|_0^{(\mu)} \quad \text{et} \quad h_p, \quad B|_\infty^{(1)}$$

sont bornées; $D^\mu a_{\alpha,p} \rightarrow D^\mu a_\alpha$ fortement localement sur X , $|\alpha| \leq m+1$; $D^1 a_{\alpha,p} \rightarrow D^1 a_\alpha$ fortement localement sur X , si $|\alpha| = m+1$; l'hyperplan $S: x_1 = t$ est régulièrement spatial pour les $a_p(x, D)$ et pour $a(x, D)$; la suite $\chi_{0,p}$ des caractères de régularité spatiale est bornée;

$$g \in W_2^{(\mu)}(X) ; \quad f_p \in W_2^{(m+\mu+1)}(X);$$

la suite des normes $\|D^{m,\mu} f_p, S_0\|$ est bornée;

$$D^\mu a_p(x, D) f_p \rightarrow D^\mu g \quad \text{faiblement sur } X.$$

Conclusion: on peut extraire de la suite f_p une suite partielle f_r et trouver une fonction $f \in W_2^{(m+\mu)}(X)$ telles que $D^{m+\mu} f_r \rightarrow D^{m+\mu} f$ faiblement sur X et sur chaque hyperplan $S = S(t)$, $0 \leq t < T$; la restriction $D^{m+\mu} f|_S$ est une fonction bien définie; $\|D^{m+\mu} f, S\|$ a une borne indépendante de t ; la distribution $a(x, D) f$ vérifie

$$a(x, D) f = g \quad \text{sur } X.$$

Preuve. Vu le Lemme 6, N° 6, Chapitre II, on peut supposer les coefficients b_p et b de D_1^{m+1} dans les opérateurs a_p et a égaux à 1. Il est évident que la régularité spatiale de S , impliquant la régularité hyperbolique des opérateurs a_p et a , implique aussi celle des opérateurs $(1/b_p)a_p$ et $(1/b)a$. Vu l'inégalité énergétique générale, il existe une constante K , indépendante de p et de t , telle que

$$(2.1.0) \quad \|D^{m+\mu} f_p, S\| < K.$$

1) Extraction de la suite f_r et définition presque partout de f sur X .
Vu (2.1.0), l'ensemble des nombres

$$\|D^{m+\mu} f_p, X\|$$

est borné. On peut donc, d'après la Proposition 1.1, extraire de la suite f_p une suite f_r telle que $D^{m+\mu} f_r$ converge faiblement sur X . Désignons par f la faible limite de f_r sur X ; on a donc

$$D^{m+\mu} f_r \rightarrow D^{m+\mu} f \quad \text{faiblement sur } X$$

et

$$f \in W_2^{(m+\mu)}(X).$$

2) Allure de f_r sur X . Montrons que

$$a(x, D) f = g.$$

Soit ψ une fonction régulière à support compact intérieur à X . Distinguons deux cas :

1^{er} cas : $0 < \mu$. Par hypothèse,

$$a_{\alpha, r} \rightarrow a_{\alpha} \quad \text{fortement localement ;}$$

donc, vu la Proposition 1.2,

$$(2.1.1) \quad \int_X \psi a_{\alpha, r} D^{\alpha} f_r dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_X \psi a_{\alpha} D^{\alpha} f dx_1 \dots dx_l ;$$

donc,

$$(2.1.2) \quad \int_X \psi a_r(x, D) f_r dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_X \psi a f dx_1 \dots dx_l.$$

Or, par hypothèse,

$$\int_X \psi a_r(x, D) f_r dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_X \psi g dx_1 \dots dx_l ;$$

donc,

$$a(x, D) f = g \quad \text{sur } X.$$

2^{ème} cas : $\mu = 0$.

a) Si $0 \leq |\alpha| \leq m$, on a de même, vu l'hypothèse que

$$a_{\alpha, r} \rightarrow a_{\alpha} \quad \text{fortement localement,}$$

$$(2.1.3) \quad \int_X \psi a_{\alpha, r} D^{\alpha} f_r dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_X \psi a_{\alpha} D^{\alpha} f dx_1 \dots dx_l.$$

b) Soit $|\alpha| = m + 1$; on a $D^\alpha = D_k D^\beta$ où $|\beta| = m$; vu l'hypothèse

$$D_k \psi a_{\alpha,r} \rightarrow D_k \psi a_\alpha \quad \text{fortement localement,}$$

$$\begin{aligned} \int_X \psi a_{\alpha,r} D^\alpha f_r dx_1 \dots dx_l &= - \int_X D_k (\psi a_{\alpha,r}) D^\beta f_r dx_1 \dots dx_l \\ &\rightarrow - \int_X D_k (\psi a_\alpha) D^\beta f dx_1 \dots dx_l = \int_X \psi a_\alpha D^\alpha f dx_1 \dots dx_l, \end{aligned}$$

$a_\alpha D^\alpha f$ étant défini au sens de la théorie des distributions.

Donc, (2.1.3) vaut pour tous les α ; donc,

$$\int_X \psi a_r(x, D) f_r dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_X \psi a(x, D) f dx_1 \dots dx_l;$$

donc,

$$af = g \quad \text{sur } X.$$

Cette relation vaut donc pour tout $\mu \geq 0$.

3) Allure de f_r sur S quand $\mu > 0$. Vu la Proposition 1.4 et vu que

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} D^{m+\mu} f_r &\rightarrow D^{m+\mu} f && \text{faiblement sur } X - B, \\ D^\beta f_r &\rightarrow D^\beta f && \text{faiblement sur } S \end{aligned}$$

si $|\beta| < m + \mu$ et $0 \leq t < T$.

Prouvons maintenant que (2.1.4) a lieu, si $|\beta| = m + \mu$ et $\beta \neq (m + \mu, 0, \dots, 0)$.

Soit ψ une fonction régulière à support compact. Posons $D^\beta = D_k D^\gamma$ où $k \neq 1$, $|\gamma| = m + \mu - 1$.

$$\int_S \psi D^\beta f_r dx_2 \dots dx_l = - \int_S (D_k \psi) D^\gamma f_r dx_2 \dots dx_l$$

tend vers

$$- \int_S (D_k \psi) D^\gamma f dx_2 \dots dx_l = \int_S \psi D^\beta f dx_2 \dots dx_l;$$

donc, vu (2.1.0), $D^\beta f_r$ converge faiblement sur S ; vu le théorème de Fubini, on peut préciser la définition de f en sorte que cette faible limite

est la restriction $D^\beta f|S$. Ceci complète la définition de f : $D^\beta f$ est maintenant définie presque partout sur chaque $S = S(t)$, $0 \leq t < T$, pour $|\beta| \leq m + \mu$, $\beta \neq (m + \mu, 0, \dots, 0)$; vu (2.1.0) et la Proposition 1.3,

$$\|D^{m+\mu} f, S\| < K.$$

D'autre part, vu la Proposition 1.4,

$$(2.1.5) \quad D^{\mu-1} a_{\alpha,r} \rightarrow D^{\mu-1} a_\alpha \quad \text{fortement localement sur } S,$$

puisque

$$D^\mu a_{\alpha,r} \rightarrow D^\mu a_\alpha \quad \text{fortement localement sur } X - B.$$

Vu la Proposition 1.2, il résulte de (2.1.4) et (2.1.5) que

$$D^{\mu-1}(a_{\alpha,r} D^\alpha f_r) \rightarrow D^{\mu-1}(a_\alpha D^\alpha f) \quad \text{faiblement sur } S$$

si $0 \leq |\alpha| \leq m + 1$, $\alpha \neq (m + 1, 0, \dots, 0)$.

D'autre part, vu que

$$D^\mu a_p(x, D) f_p \rightarrow D^\mu g \quad \text{faiblement sur } X - B$$

et vu la Proposition 1.4,

$$D^{\mu-1} \left(\sum_{\alpha=0}^{m+1} a_{\alpha,r} D^\alpha f_r \right) \rightarrow D^{\mu-1} g \quad \text{faiblement sur } S,$$

où $a_{\alpha,r} = a_\alpha = 1$ pour $\alpha = (m + 1, 0, \dots, 0)$.

Il en résulte que (2.1.4) a lieu aussi quand

$$\beta = (m + \mu, 0, \dots, 0).$$

On a donc, pour $0 \leq t < T$, $D^{m+\mu} f_r \rightarrow D^{m+\mu} f$ faiblement sur S .

4) Allure de f_r sur S quand $\mu = 0$.

On démontre, comme dans le cas $\mu > 0$, que

$$D^\alpha f_r \rightarrow D^\alpha f \quad \text{faiblement sur } S$$

quand $|\alpha| < m$, puis quand $|\alpha| = m$, $\alpha \neq (m, 0, \dots, 0)$.

Prouvons cette faible convergence pour $\alpha = (m, 0, \dots, 0)$: montrons que

$$(2.1.6) \quad \int_S \psi D_1^m f_r dx_2 \dots dx_l \rightarrow \int_S \psi D_1^m f dx_2 \dots dx_l$$

où ψ est une fonction régulière à support compact étranger à $S(T)$; $x_l = T$.

Posons

$$\psi_1 = D_1 \psi.$$

Vu le théorème de Stokes, (2.1.6) est équivalent à

$$\begin{aligned} \int_{X-B} (\psi D_1^{m+1} f_r + \psi_1 D_1^m f_r) dx_1 \dots dx_l \\ \rightarrow \int_{X-B} (\psi D_1^{m+1} f + \psi_1 D_1^m f) dx_1 \dots dx_l. \end{aligned}$$

Or,

$$D_1^m f_r \rightarrow D_1^m f \quad \text{faiblement sur } X.$$

Il suffit donc de prouver que

$$\int_{X-B} \psi D_1^{m+1} f_r dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_{X-B} \psi D_1^{m+1} f dx_1 \dots dx_l.$$

Or,

$$D_1^{m+1} f_r + \sum_{\alpha \neq (m+1, 0, \dots, 0)} a_{\alpha, r} D^\alpha f_r = a_r(x, D) f_r$$

tend faiblement sur $X - B$ vers

$$a(x, D) f = D_1^{m+1} f + \sum_{\alpha \neq (m+1, 0, \dots, 0)} a_\alpha D^\alpha f.$$

Il suffit donc de montrer que

$$(2.1.7) \quad \int_{X-B} \psi a_{\alpha, r} D^\alpha f_r dx_1 \dots dx_l \rightarrow \int_{X-B} \psi a_\alpha D^\alpha f dx_1 \dots dx_l$$

pour $|\alpha| \leq m+1$, $\alpha \neq (m+1, 0, \dots, 0)$.

Distinguons deux cas :

1^{er} cas. $|\alpha| \leq m$. Vu que

$$a_{\alpha, r} \rightarrow a_\alpha \quad \text{fortement localement sur } X - B$$

et

$$D^\alpha f_r \rightarrow D^\alpha f \quad \text{faiblement sur } X - B,$$

(2.1.7) a lieu.

2ème cas. $|\alpha| = m + 1$, $\alpha \neq (m + 1, 0, \dots, 0)$. On a

$$D^\alpha = D_k D^\beta \quad \text{où } 2 \leq k \leq l \quad \text{et } |\beta| = m;$$

d'où, vu l'hypothèse que $D_k a_{\alpha,p} \rightarrow D_k a_\alpha$ fortement localement sur X et vu la convergence faible

$$D^m f_r \rightharpoonup D^m f \quad \text{sur } X \text{ (voir 1),}$$

$$\begin{aligned} \int_{X-B} \psi a_{\alpha,r} D^\alpha f_r dx_1 \dots dx_l &= - \int_{X-B} D_k (\psi a_{\alpha,r}) D^\beta f_r dx_1 \dots dx_l \\ &\rightarrow - \int_{X-B} D_k (\psi a_\alpha) D^\beta f dx_1 \dots dx_l = \int_{X-B} \psi a_\alpha D^\alpha f dx_1 \dots dx_l \end{aligned}$$

(2.1.6) est donc démontré; donc,

$$D^m f_r \rightarrow D^m f \quad \text{faiblement sur } S;$$

d'où le théorème.

Théorème 2.2. Aux hypothèses du Théorème 2.1, ajoutons les hypothèses suivantes;

- 1) $\|a_p, B\|_Q^{(\mu)} \rightarrow \|a, B\|_Q^{(\mu)}$;
- 2) $\|h_p, B\|_\infty^{(1)} \rightarrow \|h, B\|_\infty^{(1)}$, $\|h_p, S_0\|_\infty^{(1)} \rightarrow \|h, S_0\|_\infty^{(1)}$;
- 3) $1/a_{1,p} \rightarrow 1/a_1$ ($a_{1,p}$ coefficient de D_1^{m+1} de a_p et a_1 coefficient de D_1^{m+1} de a);
- 4) $\|a_p, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \rightarrow \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)}$;
- 5) $\chi_{0,p} \rightarrow \chi_0$ (caractère spatial de S pour $a(x, D)$);
- 6) $D^{m,\mu} f_p$ convergent fortement vers $D^{m,\mu} f$ sur S_0 ;
- 7) $D^\mu a_p(x, D) f_p \rightarrow D^\mu g$ fortement sur X .

Alors, la fonction limite f vérifie l'inégalité énergétique:

$$\begin{aligned} (2.2.1) \quad \|D^{m+\mu} f, S\| &\leq C \int_0^t \|D^\mu g, S(t')\| dt' + CC_0 \|D^{m-1} g, S_0\| \\ &\quad + CC_0 \|D^{m,\mu} f, S_0\| \end{aligned}$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h, B\|_\infty^{(1)} + \|a, B\|_Q^{(\mu)}; \|h, B\|_\infty^{(0)}, \|h, S_0\|_\infty^{(1)}, \chi(a, B))$$

indépendantes de $\|h, B\|_{\infty}^{(1)} + \|a, B\|_Q^{(\mu)}$ pour $t=0$ et les C_0 sont des fonctions continues et croissantes de

$$\|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)}.$$

Preuve. Posons

$$g_p = a_p f_p \in W_2^{(\mu)}(X).$$

Vu le Lemme 4.2, N° 4, Chapitre III (inégalité énergétique),

$$(2.2.2) \quad \|D^{m+\mu} f_p, S\| \leq C \int_0^t \|D^{\mu} g_p, S(t')\| dt' + CC_0 \|D^{\mu-1} g_p, S_0\| \\ + CC_0 \|D^{m,\mu} f_p, S_0\|$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h_p, B\|_{\infty}^{(1)} + \|a_p, B\|_Q^{(\mu)}; \|h_p, B\|_{\infty}^{(0)}, \|h_p, S_0\|_{\infty}^{(1)}, \chi(a_p, B))$$

indépendantes de $\|h_p, B\|_{\infty}^{(1)} + \|a_p, B\|_Q^{(\mu)}$ pour $t=0$ et les C_0 sont des fonctions continues et croissantes de $\|a_p, S_0\|_Q^{(\mu-1)}$.

Or,

$$|\|D^{\mu} g_p, S\| - \|D^{\mu} g, S\|| \leq \|D^{\mu} g_p - D^{\mu} g, S\|$$

et, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left[\int_0^t \|D^{\mu} g_p - D^{\mu} g, S(t')\| dt' \right]^2 \leq t \int_0^t \|D^{\mu} g_p - D^{\mu} g, S(t')\|^2 dt' \\ = t \|D^{\mu} g_p - D^{\mu} g, B\|^2 \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow \infty.$$

Donc,

$$\int_0^t \|D^{\mu} g_p, S(t')\| dt' \rightarrow \int_0^t \|D^{\mu} g, S(t')\| dt'.$$

D'autre part, vu la Proposition 1.4.

$$\|D^{\mu-1} g_p, S_0\| \rightarrow \|D^{\mu-1} g, S_0\|,$$

car $D^{\mu} g_p \rightarrow D^{\mu} g$ fortement sur X et donc $D^{\mu-1} g_p \rightarrow D^{\mu-1} g$ fortement sur S_0 .

Enfin, vu la Proposition 1.3,

$$\| D^{m+\mu} f, S \| \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \| D^{m+\mu} f_p, S \|.$$

De (2.2.2) résulte donc (2.2.1).

3. Théorème d'existence. Considérons l'équation d'ordre $m+1$:

$$(3.1) \quad au = v \quad \text{définie dans } X: 0 < x_1 < T$$

et donnons-nous des données de Cauchy :

$$(3.2) \quad u = w_0, \quad D_1 u = w_1, \dots, D_1^m u = w_m \quad \text{sur } S_0; x_1 = 0.$$

Théorème 3. Si $0 \leq \mu$, $a \in \mathcal{V}_Q^{(\mu)}(X, m+1)$ et satisfait à l'hypothèse de régularité et si

$$v \in W_2^{(\mu)}(X), \quad w_0 \in W_2^{(m+\mu)}(S_0), \quad w_1 \in W_2^{(m+\mu-1)}(S_0), \dots, w_m \in W_2^{(\mu)}(S_0),$$

alors, l'équation (3.1) a au moins une solution

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(X)$$

vérifiant les données de Cauchy (3.2) et l'inégalité énergétique

$$\begin{aligned} \| D^{m+\mu} u, S \| \leq C \int_0^t \| D^\mu v, S(t') \| dt + CC_0 \| D^{\mu-1} v, S_0 \| \\ + CC_0 \| D^{m,\mu} u, S_0 \| \end{aligned}$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \| h, B \|_\infty^{(1)} + \| a, B \|_Q^{(\mu)}; \| h, B \|_\infty^{(0)}, \| h, S_0 \|_\infty^{(1)}, \chi(a, B))$$

indépendantes de $\| h, B \|_\infty^{(1)} + \| a, B \|_Q^{(\mu)}$ pour $t=0$ et les C_0 sont des fonctions continues et croissantes de $\| a, S_0 \|_Q^{(\mu-1)}$.

Note. Si $l+1 < 2\mu$, on choisit $a \in \mathcal{V}^{(\mu)}(X, m+1)$; vu l'inégalité énergétique,

$$\| D^{m+\mu} u, S \| < +\infty;$$

donc, vu la formule (6.1.1) du Théorème 6.1, N° 6, Chapitre I,

$$| D^{m+1} u | < +\infty.$$

Preuve. Définissons ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$a_{\alpha, \varepsilon} = a_\alpha * \varphi_\varepsilon, \quad h_\varepsilon = \sum_{\alpha=m+1} a_{\alpha, \varepsilon} D^\alpha, \quad a_3 = \sum_{\alpha=0}^{m+1} a_{\alpha, \varepsilon} D^\alpha;$$

$$v_\varepsilon = v * \varphi_\varepsilon;$$

de même régularisons par convolution sur S_0 les données de Cauchy :

$$(3.3) \quad w_{0,\varepsilon} = w_0 * \psi_\varepsilon; \quad w_{1,\varepsilon} = w_1 * \varphi_\varepsilon; \dots; \quad w_{m,\varepsilon} = w_m * \varphi_\varepsilon$$

où ψ est une fonction > 0 , de classe $C^\infty(S_0)$ telle que

$$\int_{S_0} \psi(x) dx_2 \dots dx_l = 1$$

et de support compris dans la boule

$$r = \sqrt{x_2^2 + \dots + x_l^2} < 1, \quad x_1 = 0,$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-l} \psi(\varepsilon^{-1}x)$$

et

$$w_i * \varphi_\varepsilon = \int_{S_0} w_i(x-y) \psi(y) dy_2 \dots dy_l;$$

construisons une fonction

$$w_\varepsilon \in W_2^{(m+\mu+1)}(B)$$

vérifiant sur S_0 les données de Cauchy (3.3) :

$$w_\varepsilon = w_{0,\varepsilon}; \quad D_1 w_\varepsilon = w_{1,\varepsilon}, \dots, \quad D_1^m w_\varepsilon = w_{m,\varepsilon};$$

c'est possible, d'après un théorème de Sobolev (v. [16]).

Remarquons que

$$a_\varepsilon \in \mathcal{V}_\infty^{(\mu+1)}(X, m+1) \quad \text{et} \quad v_\varepsilon \in W_2^{(\mu+1)}(X).$$

Vu le Théorème 7.2, N° 7, Chapitre III, on a, pour tous les α ,

$$D^\mu a_{\alpha,\varepsilon} \rightarrow D^\mu a_\alpha \quad \text{fortement localement sur } X;$$

$$D^1 a_{\alpha,\varepsilon} \rightarrow D^1 a_\alpha \quad \text{fortement localement sur } X \text{ si}$$

$$|\alpha| = m+1;$$

$$\|a_\varepsilon, B - B_\varepsilon\|_Q^{(\mu)} \rightarrow \|a, B\|_Q^{(\mu)},$$

$$\|h_\varepsilon, B - B_\varepsilon\|_\infty^{(1)} \rightarrow \|h, B\|_\infty^{(1)},$$

$$\|h_\varepsilon, S_0\|_\infty^{(1)} \rightarrow \|h, S_0\|_\infty^{(1)},$$

$$\|a_\varepsilon, S_0\|_Q^{(\mu-1)} \rightarrow \|a, S_0\|_Q^{(\mu-1)}$$

et pour $|\alpha| = m + 1$,

$$(3.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|a_{\alpha, \varepsilon} - a_{\alpha}, X - X_{\varepsilon}\|_{\infty} = 0;$$

enfin

$$1/(a_1 * \varphi_{\varepsilon}) \rightarrow 1/a_1 \quad (a_1 \text{ est continu}).$$

Vu la formule (7.1.4) du Théorème 7.1, N° 7, Chapitre II,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^{\mu} v_{\varepsilon} - D^{\mu} v, X - X_{\varepsilon}\| = 0;$$

de même,

$$(3.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^{m+\mu-i} w_{i, \varepsilon} - D^{m+\mu-i} w_i, S_0\| = 0,$$

$i = 0, 1, \dots, m$.

Vu (3.2), les a_{ε} sont donc régulièrement hyperboliques, uniformément et S est pour eux régulièrement spatial, uniformément; plus précisément, les caractères

$$\chi_{0, \frac{\varepsilon}{2}} \rightarrow \chi_0.$$

Formons les équations

$$a_{\varepsilon}(x, D)u_{\varepsilon} = v_{\varepsilon}.$$

D'après le théorème d'existence de Gårding, chaque équation possède une solution

$$u_{\varepsilon} \in W_2^{(m+\mu+1)}(X)$$

telle que

$$D^m u_{\varepsilon} = D^m w_{\varepsilon} \quad \text{sur } S_0.$$

De plus sur S_0 , vu le calcul des dérivés d'ordres $\leq D^{m, \mu}$ de u_{ε} à partir de $D^m w_{\varepsilon}$ (v. Lemme 4.2, N° 4, Chapitre III),

$$D^{m, \mu} u_{\varepsilon} = (D^{m+\mu} w_{0, \varepsilon}, D^{m+\mu-1} w_{1, \varepsilon}, \dots, D^{\mu} w_{m, \varepsilon});$$

vu (3.3), cette fonction vectorielle tend fortement vers

$$(D^{m+\mu} w_0, D^{m+\mu-1} w_1, \dots, D^{\mu} w_m).$$

Or, les hypothèses des Théorèmes 2.1 et 2.2 du N° 2 sont vérifiées: il existe donc

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(X)$$

telle que

$$a(x, D) u(x) = v(x) \quad \text{sur } X$$

et

$$\begin{aligned} \| D^{m+\mu} u, S \| &< C \int_0^t \| D^\mu v, S(t') \| dt' + CC_0 \| D^{\mu-1} v, S_0 \| \\ &+ CC_0 \| D^{m,\mu} u, S_0 \| \end{aligned}$$

où les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \| h, B \|_\infty^{(1)} + \| a, B \|_Q^{(\mu)}; \| h, B \|_\infty^{(0)}, \| h, S_0 \|_\infty^{(1)}, \chi(a, B))$$

indépendantes de $\| h, B \|_\infty^{(1)} + \| a, B \|_Q^{(\mu)}$ pour $t=0$ et les C_0 sont des fonctions continues et croissantes de $\| a, S_0 \|_Q^{(\mu-1)}$; de plus, vu que

$$D^{m,\mu} u_\varepsilon \rightarrow D^{m,\mu} u \quad \text{fortement sur } S_0$$

on a,

$$u = w_0, \quad D_1 u = w_1, \dots, D_1^m u = w_m \quad \text{sur } S_0.$$

Chapitre V

ÉQUATIONS QUASI-LINÉAIRES

La résolution du problème de Cauchy linéaire (Chapitres III et IV) va nous permettre de résoudre par approximations successives le problème de Cauchy quasi-linéaire :

$$\begin{cases} a[x, D^m u, D] u = b[x, D^m u] \quad \text{sur } X \\ u = w_0, D_1 u = w_1, \dots, D_1^m u = w_m \quad \text{sur } S_0. \end{cases}$$

Ces approximations successives s'obtiennent à partir du problème de Cauchy relatif à l'équation linéaire,

$$a[x, D^m v, D] u = b[x, D^m v]$$

d'ordre $m+1$, définie sur X , où $u(x)$ est une fonction numérique inconnue, $b[x, y]$ et les coefficients $a_\alpha[x, y]$ de $a[x, y, D]$ sont des fonctions

numériques données, y étant un vecteur de R^r , $r = \frac{(m+l)!}{l!m!}$; $v(x)$ est une fonction numérique donnée dont les dérivées d'ordres $\leq m$ au sens de la théorie des distributions, sont des fonctions.

1. Hypothèses et notations.

Dans l'étude du problème quasi-linéaire, nous supposons

$$(1.1) \quad l-1 < 2(\mu-1),$$

$$a \in \mathcal{Y}_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y, m+1), \quad b \in W_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y);$$

X est une bande $0 \leq x_1 \leq T$ d'un espace euclidien E de dimension l et Y est un ouvert de R^r .

Nous nous donnons des données de Cauchy

$$(1.2) \quad u = w_0, \quad D_1 u = w_1, \dots, \quad D_1^m u = w_m \quad \text{sur } S_0$$

où

$$(1.3) \quad w_0 \in W_2^{(m+\mu)}(S_0), \quad w_1 \in W_2^{(m+\mu-1)}(S_0), \dots, w_m \in W_2^{(\mu)}(S_0)$$

et telles que la fonction vectorielle

$$(D^m w_0, D^{m-1} w_1, \dots, w_m)$$

ait ses valeurs dans une partie compacte de Y .

Posons

$$\chi[a, X \times Y] = \sup [1/a_1[x, y], 1/\chi_0[a, X \times Y]].$$

Il en résulte, pourvu que $D^m v \in Y$, que

$$(1.4) \quad \chi[a(x, D^m v, D), B] \leq \chi[a, X \times Y].$$

2. Construction sur la bande X d'une fonction w vérifiant les données de Cauchy (1.2) sur S_0 et la condition

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|D^{m+\mu} w, S(t)\| \stackrel{\Delta}{\rightarrow} +\infty.$$

A partir de données de Cauchy vérifiant (1.2) et appartenant aux espaces (1.3), cette construction est possible (v. Sobolev [16]).

3. L'application $v \rightarrow u$ que définit le problème de Cauchy linéaire.

Lemme 3.1. Soit X_0 une bande $0 \leq x_1 \leq T_0 \leq T$; supposons définie sur X_0 une fonction $v(x)$ telle que $D^m v \in Y$ et

$$(3.1.1) \quad \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|D^{m+\mu} v, S\| < +\infty.$$

Sur cette bande X_0 , l'équation

$$(3.1.2) \quad a[x, D^m v, D]u = b[x, D^m v]$$

a une et une seule solution

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(X_0)$$

vérifiant les données de Cauchy

$$u = w_0, \quad D_1 u = w_1, \dots, D_1^m u = w_m \quad \text{sur } S_0$$

(ce qui implique $D^m u = D^m w$ sur S_0);

en posant

$$M(t) = \sup_{0 \leq t' \leq t} \|D^{m+\mu} v, S(t')\|$$

on a

$$\|D^{m+\mu} u, S\| < F[t, M(t), M(0)]$$

où $F[t, M, M_0]$ est une fonction croissante et continue de $[t, M, M_0]$ ayant la propriété suivante:

$$F[0, M, M_0] = F_0(M_0) \quad \text{ne dépend que de } M_0.$$

Note. $F[t, M, M_0]$ et $F_0(M_0)$ dépendent en outre de

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} T, \|h, X \times Y\|_{\infty, \infty}^{(1)} + \|a, X \times Y\|_{2, \infty}^{(\mu)}; \\ \|D^\mu b, X \times Y\|_{2, \infty}, \|D^{m, \mu} w, S_0\|, \chi[a, X \times Y], \end{cases}$$

mais elles sont indépendantes de T_0 .

Preuve. (3.1.1) implique que

$$v \in W_2^{(m+\mu)}(X_0).$$

Vu le Théorème 6.4, N° 6, Chapitre I, où l'on fait $m = M = \mu$,

$$b[x, D^m v] \in W_2^{(\mu)}(X_0)$$

et vu le Lemme 3, N° 3, Chapitre II, où l'on fait $M = \mu$,

$$a[x, D^m x, D] \in \mathcal{V}^{(\mu)}(X_0, m+1).$$

D'après les théorèmes d'unicité et d'existence des Chapitres III et IV, l'équation (3.1.2) a une et une seule solution

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(X_0)$$

vérifiant

$$u = w_0, \quad D_1 u = w_1, \dots, D_1^m u = w_m \quad \text{sur } S_0.$$

On a l'inégalité énergétique

$$\begin{aligned} \|D^{m+\mu} u, S\| &\leq C \int_0^t \|D^\mu b[x, D^m v], S(t')\| dt' \\ &+ CC_0 \|D^{\mu-1} b[x, D^m v], S_0\| + CC_0 \|D^{m+\mu} w, S_0\|; \end{aligned}$$

les C sont des fonctions continues et croissantes de

$$(t, \|h[x, D^m v, D], B\|_\infty^{(1)} + \|a[x, D^m v, D], B\|^{(\mu)});$$

$$\|h[x, D^m v, D], B\|_\infty^{(0)}, \|h[x, D^m v, D], S_0\|_\infty^{(1)}, \chi[a(x, D^m v, D)]$$

indépendantes de $\|h[x, D^m v, D], B\|_\infty^{(1)} + \|a[x, D^m v, D], B\|^{(\mu)}$ pour $t = 0$; les C_0 sont des fonctions continues et croissantes de

$$\|a[x, D^m v, D], S_0\|^{(\mu-1)};$$

or, vu (6.2.2), Lemme 6.2, N° 6, Chapitre I, où l'on fait $m = M = \mu$,

$$\|a[x, D^m v, D], B\|^{(\mu)} \leq C \|a, X \times Y\|_{2,\infty}^{(\mu)} [1 + M(t)]^\mu;$$

vu le Lemme 3, (3.2) N° 3, Chapitre II,

$$\|h[x, D^m v, D], S\|_\infty^{(1)} \leq C \|h[x, v, D], X \times Y\|_{\infty,\infty}^{(1)} \cdot [1 + M(t)]^\mu$$

vu (6.2.1), Lemme 6.2, N° 6, Chapitre I, où l'on fait $m = M = \mu$,

$$\int_0^t \|D^\mu b[x, D^m v], S(t')\| dt' \leq \sqrt{t} C \|D^\mu b, X \times Y\|_{2,\infty} [1 + M(t)]^\mu;$$

vu le Lemme 3, (3.1) N° 3, Chapitre II où l'on remplace μ par $\mu - 1$ et M par μ , puis le Théorème 6.2 b), N° 6, Chapitre I,

$$\|a[x, D^m v, D], S_0\|^{(\mu-1)} \leq C \|a, X \times Y\|_{2,\infty}^{(\mu)} [1 + M(0)]^{\mu-1};$$

vu le Théorème 6.4, N° 6, Chapitre I, où l'on remplace m par $\mu - 1$ et M par μ , puis le Théorème 6.2 b), N° 6, Chapitre I,

$$\| D^{\mu-1} b [x, D^m v], S_0 \| \leq C \| D^{\mu} b, X \times Y \|_{2,\infty} [1 + M(0)]^{\mu-1};$$

d'où le lemme, compte tenu de (1.4).

Lemme 3.2. Si

$$D^m v = D^m w \quad \text{sur } S_0$$

et si

$$tM(t) < C[w, Y] \quad \text{pour } C \text{ convenablement choisi,}$$

alors

$$D^m v \in Y \quad \text{pour } 0 \leq x_1 \leq t, \quad t > 0.$$

Preuve. Vu le Théorème 6.1, N° 6, Chapitre I, l'hypothèse

$$l - 1 < 2(\mu - 1)$$

implique que

$$\| D^{m+1} v, S \|_x \leq C_0(m, \mu, l) \| D^{m+\mu} v, S \|;$$

d'où $D^m v \in Y$ pour $tM(t) < C$, en choisissant C convenablement en fonction de Y et de sa partie compacte contenant les valeurs de $D^m w|_{S_0}$.

4. Caractère Lipschitzien de l'application $v \rightarrow u$.

Lemme 4. Les hypothèses étant celles du Lemme 3.1, si v_1 et v_2 sont deux choix de v et u_1, u_2 les solutions correspondantes et si

$$D^{m+\mu-1} v_1 = D^{m+\mu-1} v_2 \quad \text{sur } S_0,$$

alors

$$\| D^{m+\mu-1} (u_1 - u_2), S \|^2 < C \int_0^t \| D^{m+\mu-1} (v_1 - v_2), S(t') \|^2 dt'$$

où C est une fonction continue et croissante de

$$(N, T, \|h, X \times Y\|_{\infty, \infty}^{(1)} + \|a, X \times Y\|_{2, \infty}^{(\mu)}; \|D^{\mu} b, X \times Y\|_{2, \infty}, \chi[a, X \times Y])$$

où

$$N = \sup_{0 \leq t \leq T} \| D^{m+\mu} v_1, S(t) \| + \sup_{0 \leq t \leq T} \| D^{m+\mu} v_2, S(t) \| \\ + \sup_{0 \leq t \leq T} \| D^{m+\mu} u_1, S(t) \|.$$

Preuve.

$$(4.1) \quad a[x, D^m v_2, D](v_2 - u_1) \\ = b[x, D^m v_2] - b[x, D^m v_1] + [a(x, D^m v_1, D) - a(x, D^m v_2, D)] u_1.$$

Vu le Corollaire 2 du Théorème 6.4, N° 6, Chapitre I, où l'on remplace p, m, M, n qui vérifient

$$1 < p, \quad m \leq M, \quad n < (M-1)p$$

par $2, \mu, \mu, l-1$ qui vérifient (1.1), N° 1 :

$$l-1 < 2(\mu-1),$$

on a

$$(4.2) \quad \| D^{\mu-1} [a(x, D^m v_1, D) u_1] - D^{\mu-1} [a(x, D^m v_2, D) u_1], S \| \\ < K_1 \| D^{m+\mu-1} (v_1 - v_2), S \|$$

où

$$K_1 = C(\mu, l) \| a, S \times Y \|_{2,x}^{(\mu)} \| D^{m+\mu} u_1, S \| \\ \cdot [1 + \| D^{m+\mu} v_1, S \| + \| D^{m+\mu} v_2, S \|]^{\mu-1}.$$

Vu le Corollaire 1 du Théorème 6.4, N° 6, Chapitre I, où l'on remplace de même p, m, M, n par $2, \mu, \mu, l-1$ on a

$$(4.3) \quad \| D^{\mu-1} b[x, D^m v_2] - D^{\mu-1} b[x, D^m v_1], S \| \\ < K_2 \| D^{m+\mu-1} (v_1 - v_2), S \|$$

où

$$K_2 = C(\mu, l) \| D^{m+\mu}, S \times Y \|_{2,x} \\ \cdot [1 + \| D^{m+\mu} v_1, S \| + \| D^{m+\mu} v_2, S \|]^{\mu-1}.$$

La solution unique $u_2 - u_1$ de l'équation (4.1) vérifie, d'après le Théorème 3, N° 3, Chapitre IV, l'inégalité énergétique :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & \| D^{m+\mu-1} (u_2 - u_1), S \| \\ & \leq C \int_0^t \| D^{\mu-1} \{ b(x, D^m v_2) - b(x, D^m v_1) \\ & \quad + [a(x, D^m v_1, D) - a(x, D^m v_2, D)] u_1 \}, S(t') \| dt' \end{aligned}$$

où C est une fonction continue et croissante de

$$(t, \| h, B \|_{\infty}^{(1)} + \| a, B \|_2^{(\mu)}, \chi[a, B]);$$

portons (4.2) et (4.3) dans (4.4); appliquons l'inégalité de Schwarz à chacun des termes

$$\begin{aligned} & \int_0^t \| D^{\mu} b, S(t') \times Y \|_{2, \infty} \| D^{m+\mu-1} (v_1 - v_2), S(t') \| dt', \\ & \int_0^t \| a, S(t') \times Y \|_{2, \infty}^{(\mu)} \| D^{m+\mu-1} (v_1 - v_2), S(t') \| dt'; \end{aligned}$$

on obtient le lemme, compte tenu des formules (3.1) et (3.3) du N° 3, Chapitre I.

5. Les approximations successives de la solution du problème de Cauchy quasi-linéaire.

Soit à résoudre le problème de Cauchy quasi-linéaire :

$$\begin{cases} a[x, D^m u, D] u = b[x, D^m u] & \text{sur } X, \\ D^m u = D^m w & \text{sur } S_0. \end{cases}$$

Prenons comme 1ère approximation

$$u_1 = w.$$

Continuons par récurrence : soit $1 \leq k$; supposons définie sur une bande $X_{k-1} : 0 \leq x_1 \leq T_{k-1}$, une fonction

$$u_k \in W_2^{(m+\mu)}(X_{k-1}), \quad (X_0 = X)$$

telle que

$$M_k(t) = \sup_{0 \leq t' \leq t} \| D^{m+\mu} u_k, S(t') \| < +\infty$$

pour $0 \leq t \leq T_{k-1}$ et que

$$D^m u_k = D^m w \quad \text{sur } S_0;$$

d'après le Lemme 3.2, on peut construire une bande

$$X_k : 0 \leq x_1 \leq T_k (T_k \leq T_{k-1})$$

où

$$D^m u_k \in Y ;$$

d'après le Lemme 3.1, sur cette bande X_k , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a[x, D^m u_k, D] u_{k+1} = b[x, D^m u_k] \\ D^m u_{k+1} = D^m w \quad \text{sur } S_0 \end{cases}$$

possède une et une seule solution

$$u_{k+1} \in W_2^{(m+\mu)}(X_k)$$

vérifiant

$$M_{k+1}(t) < F[t, M_k(t), M_k(0)] < +\infty$$

pour $0 \leq t \leq T_k$.

On a ainsi construit une suite décroissante de bandes X_k :

$$X_k : 0 \leq t \leq T_k ; T_0 \geq T_1 \geq T_2 \geq \dots > 0 ;$$

et une suite de fonctions u_k définies sur X_{k-1} .

D'après les Lemmes 3.1, 3.2 et 4, on a donc

Lemme 5. 1)

$$M_{k+1}(t) < F[t, M_k(t), M_k(0)] \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T_k,$$

$F[0, M, M_0]$ ne dépendant que de M_0 ;

2) si

$$0 \leq t \leq T_{k-1}, \quad t M_k(t) < C[w, Y],$$

alors,

$$t \leq T_k;$$

3) si

$$(5.1) \quad D^{m+\mu-1} u_k = D^{m+\mu-1} u_{k-1} \quad \text{sur } S_0,$$

alors,

$$\|D^{m+\mu-1}(u_{k+1} - u_k), S\|^2 < C \int_0^t \|D^{m+\mu-1}(u_k - u_{k-1}), S(t')\|^2 dt'$$

où C est une fonction continue et croissante de

$$(M_k + M_{k-1}, T, \|h, X \times Y\|_{\infty, \infty}^{(1)} + \|a, X \times Y\|_{2, \infty}^{(\mu)}; \\ \|D^\mu b, X \times Y\|_{2, \infty}, \chi[a, X \times Y]).$$

Commençons par majorer $M_k(0)$ et prouver que l'hypothèse (5.1) est vérifiée pour k assez grand.

6. Calcul de $D^{m+\mu} u_k$ sur S_0 .

Lemme 6.1. Sur S_0 ,

$$D^{m+\mu} u_{k+1} = D^{m+\mu} u_k \quad \text{pour } k > \mu.$$

Preuve. Formons les équations

$$(6.1) \quad a[x, D^m u_k, D](u_{k+1} - u_k) \\ = b[x, D^m u_k] - b[x, D^m u_{k-1}] \\ + [a(x, D^m u_{k-1}, D) - a(x, D^m u_k, D)] u_k.$$

Vu les théorèmes d'unicité et d'existence des Chapitres III et IV, la fonction

$$u_{k+1} - u_k \in W_2^{(m+\mu)}(X_k)$$

qui vérifie l'équation (6.1) et les données de Cauchy

$$D^m(u_{k+1} - u_k) = 0 \quad \text{sur } S_0$$

vérifie, pour $1 \leq v \leq \mu$, l'inégalité énergétique :

$$\|D^{m+v}(u_{k+1} - u_k), S_0\| \\ \leq C_1 C_0 [\|D^{v-1} b(x, D^m u_k) - D^{v-1} b(x, D^m u_{k-1}), S_0\| \\ + \|D^{v-1} [a(x, D^m u_{k-1}, D) u_k] - D^{v-1} [a(x, D^m u_k, D) u_k], S_0\|]$$

où C_1 est une fonction continue et croissante de

$$(\|h, X \times Y\|_{\infty, \infty}^{(1)}, \chi[a, X \times Y])$$

et C_0 une fonction continue et croissante de

$$[1 + M_k(0)]^\mu \|a, X \times Y\|_{2, \infty}^{(\mu)}.$$

Or, vu le Corollaire 1, Théorème 6.4, N° 6, Chapitre I,

$$\|D^{v-1} b[x, D^m u_k] - D^{v-1} b[x, D^m u_{k-1}], S_0\| \\ < K_1 \|D^{m+\mu-1}(u_k - u_{k-1}), S_0\|$$

où

$$K_1 = C_2 \| D^\mu b, S_0 \times Y \|_{z, \infty} \cdot [1 + \| D^{m+\mu-1} u_k, S_0 \| + \| D^{m+\mu-1} u_{k-1}, S_0 \|]^{\mu-1}$$

et vu le Corollaire 2 du même théorème,

$$\| D^{\nu-1} [a(x, D^m u_k, D) u_k] - D^{\nu-1} [a(x, D^m u_{k-1}, D) u_k], S_0 \| < K_2 \| D^{m+\nu-1} (u_k - u_{k-1}), S_0 \|^{\mu-1}$$

où

$$K_2 = C_3 \| a, S_0 \times Y \|^{(\mu)} \| D^{m+\mu} u_k, S_0 \| \cdot [1 + \| D^{m+\mu-1} u_k, S_0 \| + \| D^{m+\mu-1} u_{k-1}, S_0 \|]^{\mu-1}.$$

On a donc

$$(6.2) \quad \| D^{m+\nu} (u_{k+1} - u_k), S_0 \| < C \| D^{m+\nu-1} (u_k - u_{k-1}), S_0 \|^{\mu-1}$$

où

$$C = C_1 C_0 (K_1 + K_2), \quad 1 \leq \nu \leq \mu.$$

Faisons dans (6.2), $k = \nu + 1$ et $\nu = 1, 2, \dots, \mu - 1$; il vient

$$\| D^{m+\mu-1} (u_{\mu+1} - u_\mu), S_0 \| < C \| D^m (u_2 - u_1), S_0 \| = 0;$$

faisant maintenant dans (6.2): $\nu = \mu$, $k = \mu + 1, \mu + 2, \dots$, on obtient le lemme.

Note. En faisant $\nu = \mu - 1$ dans (6.2) et $k = \mu + 1, \mu + 2, \dots$, on obtient $D^{m+\mu-1} u_k = D^{m+\mu-1} u_{k-1}$ sur S_0 pour $\mu < k$.

Le Lemme 6.1 simplifie comme suit le Lemme 5.

Lemme 6.2. 1) Il existe une fonction continue et croissante $F[t, M]$, ne dépendant que du problème de Cauchy donné, telle que

$$M_{k+1}(t) < F[t, M_k(t)] \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T_k \text{ et } \mu < k;$$

$F[0, M] = F_0$, est indépendante de M ;

2) Si

$$0 \leq t \leq T_{k-1} \text{ et } t M_k(t) < C[w, Y],$$

alors,

$$t \leq T_k;$$

$$3) \quad \|D^{m+\mu-1}(u_{k+1}-u_k), S\|^2 < C \int_0^t \|D^{m+\mu-1}(u_k-u_{k-1}), S(t')\|^2 dt'$$

pour $\mu < k$.

7. Majoration de $M_k(t)$. μ est donné et vérifie $l-1 < 2(\mu-1)$. Choisissons M suffisamment grand pour que

$$F_0 < M$$

puis T suffisamment petit pour que :

- 1) $0 < T \leq T_{\mu+2}$ et $M_{\mu+3}(t) < M$ pour $0 \leq t \leq T$;
- 2) l'hypothèse du Lemme 3.2

$$MT < C[w, Y]$$

soit vérifiée ;

$$3) F[\mathcal{F}, M] < M.$$

Par récurrence sur k , $k = \mu + 2, \mu + 3, \dots$ déduisons du Lemme 6.2, 1) et 2) que

$$(7.1) \quad T \leq T_k \text{ et } M_{k+1}(T) < M.$$

En effet, (7.1) a lieu pour $k = \mu + 2$. D'autre part, supposons que $\mu + 2 < k$ et que (7.1) ait lieu quand $k-1$ est substitué à k , c'est à dire supposons

$$T \leq T_{k-1} \text{ et } M_k(T) < M, \quad \mu + 2 < k;$$

alors, on a

$$TM_k(T) < MT < C[w, Y];$$

donc, vu le Lemme 6.2, 2)

$$T \leq T_k;$$

et d'après le Lemme 6.2, 1)

$$M_{k+1}(T) < F[T, M] < M;$$

donc (7.1) a lieu. D'où

Lemme 7. Il existe des constantes M et T_∞ telles que

$$(7.2) \quad 0 < T_\infty \leq \dots \leq T_k \leq T_{k-1} \leq \dots \leq T_1 \leq T_0$$

et

$$(7.3) \quad \| D^{m+\mu} u_k, S(t) \| < M \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T_\infty,$$

quel que soit k .

8. Convergence des approximations successives.

Lemme 8. La suite des approximations successives

$$u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$$

converge, sur la bande $X_\infty: 0 \leq t \leq T_\infty$, vers une fonction limite

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(X_\infty),$$

solution du problème de Cauchy quasi-linéaire.

Preuve. Vu les Lemmes 6.2 et 7, pour $k > \mu$,

$$(8.1) \quad \| D^{m+\mu-1}(u_{k+1} - u_k), S \|^2 < C \int_0^t \| D^{m+\mu-1}(u_k - u_{k-1}), S(t') \|^2 dt'$$

où C est indépendant de k . Il en résulte que

$$\| D^{m+\mu-1}(u_{k+1} - u_k), S \|^2 < 4M^2 \frac{C^{k-\mu} t^{k-\mu}}{(k-\mu)!};$$

d'où la convergence uniforme en t ($0 \leq t \leq T_\infty$) de la série

$$\sum_k \| D^{m+\mu-1}(u_{k+1} - u_k), S \|^2;$$

puisque $W_2^{(m+\mu-1)}(X_\infty)$ est complet, les u_k convergent vers une limite

$$u \in W_2^{(m+\mu-1)}(X_\infty);$$

$D^{m+\mu-1} u_k$ converge vers $D^{m+\mu-1} u$ fortement sur X_∞ et sur chaque hyperplan $S = S(t)$; cette forte convergence sur $S(t)$ a lieu uniformément en t .

Il en résulte, vu le Lemme 7,

$$(8.2) \quad D^{m+\mu} u_k \rightharpoonup D^{m+\mu} u \quad \text{faiblement sur } X_\infty$$

et sur chaque hyperplan $S = S(t)$, $0 \leq t < T_\infty$; on a donc

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(X_\infty)$$

la restriction $D^{m+\mu}u|S$ est bien définie et $\|D^{m+\mu}u, S\|$ a une borne indépendante de t .

L'ensemble des nombres $\|D^{m+\mu}u_k, S\|$ est borné; vu l'hypothèse

$$l-1 < 2(\mu-1)$$

et la formule (6.1.3), Théorème 6.1, N° 6, Chapitre I, les

$$D^{m+1}u_k \text{ et } D^{m+1}u$$

sont équicontinues et la suite $D^m u_k$ converge uniformément vers $D^m u$ sur X_∞ ; donc, plus précisément, $D^{m+1}u_k$ converge uniformément vers $D^{m+1}u$ sur X_∞ .

Par suite, u est solution du problème de Cauchy quasi-linéaire :

$$\begin{cases} a[x, D^m u, D]u = b[x, D^m u] \\ D^m u = D^m w \text{ sur } S_0. \end{cases}$$

Unicité de la solution. Supposons :

$$u_1, u_2 \in W_2^{(m+\mu)}(X),$$

$$\|D^{m+\mu}u_i, S\| < +\infty, \quad i = 1, 2,$$

u_1, u_2 solutions du problème de Cauchy précédent. Alors,

$$u_1 = u_2.$$

Preuve. Vu le Lemme 4,

$$\|D^{m+\mu-1}(u_1 - u_2), S\|^2 < C \int_0^t \|D^{m+\mu-1}(u_1 - u_2), S(t')\|^2 dt';$$

donc,

$$u_1 = u_2.$$

En résumé, nous avons le

Théorème. Supposons :

$$1) \quad l-1 < 2(\mu-1)$$

$$a \in \mathcal{V}_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y, m+1), \quad b \in W_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y);$$

X est une bande $0 \leq x_1 \leq T$ d'un espace euclidien de dimension l et Y est un ouvert de R^r ;

$a[x, y, D]$ régulièrement hyperbolique pour tout
 $(x, y) \in X \times Y$,

$S: x_1 = t$, hyperplan régulièrement spatial pour
 tout $(x, y) \in X \times Y$;

2) des données de Cauchy sur S_0 :

$$w_0, w_1, \dots, w_m,$$

$$w_0 \in W_2^{(m+\mu)}(S_0), \quad w_1 \in W_2^{(m+\mu-1)}(S_0), \dots, w_m \in W_2^{(\mu)}(S_0)$$

telles que la fonction vectorielle

$$(D^m w_0, D^{m-1} w_1, \dots, w_m)$$

ait ses valeurs dans une partie compacte de Y .

Conclusion: l'équation quasi-linéaire

$$a[x, D^m u, D] u = b[x, D^m u]$$

admet, dans une bande $B: 0 \leq x_1 \leq T_\infty$, une solution et une seule u telle que

$$u \in W_2^{(m+\mu)}(B), \quad \sup_{0 \leq t \leq T_\infty} D^{m+\mu} u, S < +\infty$$

et

$$u = w_0, \quad D_1 u = w_1, \dots, D_1^m u = w_m \quad \text{sur } S_0;$$

$D^{m+1} u$ est uniformément continue sur B .

Chapitre VI ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

Soit $e[x, y]$ une fonction numérique de $x \in X$ et d'un vecteur $Y \in R^s$, $s = \frac{(m+1+l)!}{l!(m+1)!}$; y a les composantes y_α où

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l), \quad |\alpha| \leq m+1.$$

Nous allons étudier le problème de Cauchy non linéaire :

$$(I) \quad \begin{cases} e[x, D^{m+1} u] = 0 & \text{sur } X : 0 \leq x_1 \leq T, \\ u = w_0, D_1 u = w_1, \dots, D_1^{m+1} u = w_{m+1} & \text{sur } S_0 : x_1 = 0, \end{cases}$$

ces données vérifiant

$$e[x, D^{m+1} w_0, D^m w_1, \dots, w_{m+1}] = 0 \quad \text{sur } S_0.$$

Nous réduirons ce problème à un problème de Cauchy quasi-linéaire équivalent en appliquant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, l$ à l'équation

$$e[x, D^{m+1} u] = 0.$$

1. Hypothèses et notations. Notons :

$e_{x_i}[x, y]$ la dérivée partielle de $e[x, y]$ par rapport à la i -ème variable,

$e_{y_\alpha}[x, y]$ la dérivée partielle de $e[x, y]$ par rapport à y_α , et $\frac{\partial}{\partial x_i}$

la dérivée partielle de la fonction $e[x, y(x)]$ de x :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} e[x, y(x)] = e_{x_i}[x, y] + \sum_{|\alpha|=0}^{m+1} e_{y_\alpha}[x, y(x)] \cdot \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i}.$$

a) Nous supposons :

$$e_{x_i}[x, y] \in W_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y), \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

$$e_{y_\alpha}[x, y] \in V_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y) \cap V_{\alpha,\infty}^{(1)}(X, Y) \quad \text{pour } |\alpha| = m+1,$$

$$e_{y_\alpha}(x, y) \in W_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y) \quad \text{pour } |\alpha| \leq m,$$

$$\sum_{\alpha=0}^{m+1} e_{y_\alpha}[x, y] y_\alpha - e[x, y] \in W_{2,\infty}^{(\mu)}(X, Y);$$

$$h[x, y, D] = \sum_{|\alpha|=m+1} e_{y_\alpha}[x, y] D^\alpha$$

régulièrement hyperbolique sur $X \times Y$;

$S : x_1 = t$ hyperplan régulièrement spatial pour tout $(x, y) \in X \times Y$;
 X est une bande $0 \leq x_1 \leq T$ d'un espace euclidien de dimension l et Y est un ouvert de R^s .

b) Nous assujettissons l et μ à vérifier la relation

$$l - 1 < 2(\mu - 1).$$

c) Nous nous donnons des données de Cauchy

$$u = w_0, \quad D_1 u = w_1, \dots, D_1^{m+1} u = w_{m+1} \quad \text{sur } S_0$$

où

$$w_0 \in W_2^{(m+\mu+1)}(S_0), w_1 \in W_2^{(m+\mu)}(S_0), \dots, w_{m+1} \in W_2^{(\mu)}(S_0)$$

et telles que la fonction vectorielle

$$(D^{m+1} w_0, D^m w_1, \dots, w_{m+1})$$

ait ses valeurs dans une partie compacte de Y et vérifie

$$c[x, D^{m+1} w_0, D^m w_1, \dots, w_{m+1}] = 0 \quad \text{sur } S_0.$$

Note. w désignera une fonction définie sur X , vérifiant sur S_0 les données de Cauchy et satisfaisant à la condition

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|D^{m+\mu+1} w, S(t)\| < +\infty.$$

2. Construction d'un système quasi-linéaire. Posons

$$a[x, y, D] = \sum_{|\alpha| \leq m+1} c_{y\alpha}[x, y] D^\alpha,$$

$$B[x, y] = (c_0[x, y], -c_{y_1}[x, y], \dots, -c_{y_l}[x, y])$$

où

$$c_\alpha[x, y] = \sum_{|\alpha| \leq m+1} c_{y\alpha}[x, y] x^\alpha = c[x, y].$$

Soient une fonction vectorielle inconnue

$$U = (U_0, U_1, \dots, U_l)$$

et une fonction vectorielle donnée

$$W = (W_0, W_1, \dots, W_l)$$

dont les composantes sont des fonctions numériques définies sur X .

Construisons deux vecteurs $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l)$ fonctions de α :

$$\alpha = \beta(\alpha) + \gamma(\alpha), \quad |\beta(\alpha)| \leq m, \quad |\gamma(\alpha)| = 0 \quad \text{si} \quad |\alpha| \leq m;$$

$$\text{d'où} \quad |\gamma(\alpha)| = 1 \quad \text{si} \quad |\alpha| = m+1.$$

Définissons l'entier $k(\alpha)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \text{si } |\alpha| = m+1, & \text{ alors } \gamma(\alpha) = (0, \dots, 0, \gamma_{k(\alpha)}, 0, \dots, 0), \\ \text{si } |\alpha| \leq m, & \text{ alors } k(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Considérons le problème de Cauchy pour le système quasi-linéaire d'ordre $m+1$:

$$(II) \quad \begin{cases} a[x, D^{\beta(\alpha)} U_{k(\alpha)}, D] U = B[x, D^{\beta(\alpha)} U_{k(\alpha)}] \\ D^m U = D^m W; \end{cases}$$

$D^{\beta(\alpha)} U_{k(\alpha)}$ est substitué à la composante y_α de y ; nous faisons l'hypothèse :

d) La fonction vectorielle de composantes $y_\alpha = D^{\beta(\alpha)} W_{k(\alpha)}|_{S_0}$ prend ses valeurs dans une partie compacte de Y et

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|D^{m+\mu} W, S\| < +\infty.$$

Nous allons d'abord, sous cette dernière hypothèse d) et sous les hypothèses a) et b) (N° 1) résoudre le problème de Cauchy (II) et ensuite montrer que, sous l'hypothèse

$$(2.1) \quad W = \left(w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_l} \right),$$

les problèmes de Cauchy (II) et (I) sont équivalents.

3. Résolution du problème de Cauchy (II).

Lemme 3. Sous les hypothèses a), b) (N° 1) et d) (N° 2), le problème de Cauchy (II) admet, dans une bande

$$B : 0 \leq x_1 \leq t,$$

une solution et une seule U telle que

$$U_i \in W_2^{(m+\mu)}(B), \quad i = 0, 1, 2, \dots, l;$$

$$\sup_{0 \leq t' \leq t} \|D^{m+\mu} U, S(t')\| < +\infty$$

et $D^{m+1} U$ est uniformément continue sur B .

Preuve. Les hypothèses du théorème du Chapitre V sont vérifiées. Des raisonnements analogues à ceux du Chapitre V prouvent le lemme.

4. Équivalence des problèmes de Cauchy (I) et (II).

Lemme 4.1. Si u est une solution du problème de Cauchy (I) et si

$$(4.1.1) \quad W = \left(w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_l} \right)$$

alors

$$(4.1.2) \quad U = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_l} \right)$$

est une solution du problème de Cauchy (II).

Preuve. Il suffit de dériver l'équation

$$c[x, D^{m+1}u] = 0$$

par rapport à $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Réciproquement, nous allons prouver dans les trois lemmes suivants la proposition que voici :

Si le problème de Cauchy (II) admet, sous l'hypothèse (4.1.1), une solution U , alors U est de la forme (4.1.2) et la composante U_0 est la solution du problème de Cauchy (I).

Lemme 4.2. Si U est solution du problème de Cauchy (II), alors les fonctions

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_i} - U_i$$

vérifient le système linéaire homogène d'ordre $m+1$:

$$(4.2.1) \quad a[x, y_x(x), D] \left(\frac{\partial U_0}{\partial x_i} - U_i \right) + \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} c_{k,i}[x, y_x(x)] \right\} \left\{ D^{\beta(x)} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x_{k(x)}} - U_{k(x)} \right) \right\} = 0,$$

où $i = 1, 2, \dots, l$ et $y_x(x) = D^{\beta(x)} U_{k(x)}(x)$.

Preuve. Le système quasi-linéaire

$$a[x, D^{\beta(x)} U_{k(x)}, D] U = B[x, D^{\beta(x)} U_{k(x)}]$$

s'écrit

$$\sum_{\alpha=0}^{m+1} e_{y_\alpha} [x, y(x)] D^\alpha U_0 = \sum_{\alpha=0}^{m+1} e_{y_\alpha} [x, y(x)] y_\alpha(x) \dots e[x, y(x)]$$

$$\sum_{\alpha=0}^{m+1} e_{y_\alpha} [x, y(x)] D^\alpha U_i = -e_{x_i} [x, y], \quad i = 1, \dots, l.$$

Appliquons $\frac{\partial}{\partial x_i}$ à l'équation en U_0 ; il vient

$$\sum_{\alpha=0}^{m+1} e_{y_\alpha} [x, y(x)] \frac{\partial}{\partial x_i} (D^\alpha U_0)$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{m+1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} e_{y_\alpha} [x, y(x)] \right\} \{y_\alpha(x) - D^\alpha U_0\} - e_{x_i} [x, y];$$

soustrayons l'équation en U_i ; on obtient (4.2.1); d'où le lemme.

Note. Sous les hypothèses a) et b) du N° 1, vu le Lemme 3 et Lemme 3, N° 3, Chapitre II, on a

$$a[x, y_\alpha(x), D] \in \mathcal{V}_2^{(n)}(B, m+1);$$

les coefficients principaux de a sont donc lipschitziens; puisque

$$l-1 < 2(n-1)$$

implique $l < 2\mu_*$ tous les coefficients de a sont bornés et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} e_{y_\alpha} [x, y_\alpha(x)] \in V_\infty^{(0)}(B) \quad \text{pour} \quad |\alpha| = m+1;$$

l'opérateur figurant dans (4.2.1) est donc un élément de $\mathcal{V}_\infty^{(0)}(B, m+1)$.

Lemme 4.3. Si U est une solution du problème de Cauchy (II) avec des données de Cauchy vérifiant

$$D^m W = \left(D^m w, D^m \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, D^m \frac{\partial w}{\partial x_l} \right)$$

et

$$e[x, D^{m+1} w] = 0 \quad \text{sur } S_0,$$

alors les fonctions

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_i} - U_i$$

qui vérifient le système (4.2.1) vérifient aussi sur S_0 des données de Cauchy nulles, c'est-à-dire

$$D^m \left(\frac{\partial U_0}{\partial x_i} - U_i \right) = 0.$$

Preuve. Nous supposons tout au long de la preuve $x_1 = 0$.

On a, vu les données de Cauchy,

$$(4.3.1) \quad D^m(U_0, U_1, \dots, U_l) = D^m \left(w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_l} \right).$$

Il en résulte que

$$y_\alpha = D^{\beta(\alpha)} U_{k(\alpha)} = D^{\beta(\alpha)} D_{k(\alpha)} w = D^\alpha w$$

et l'équation en U_0 s'écrit

$$(4.3.2) \quad \sum_{\alpha=0}^{m-1} e_{y_\alpha}[x, y(x)] \{D^\alpha(U_0 - w)\} = 0.$$

Or, (4.3.1) donne

$$D^m U_0 = D^m w;$$

donc, en dérivant le long de S_0 ,

$$D^\alpha U_0 = D^\alpha w \quad \text{pour } \alpha \neq (m+1, 0, \dots, 0).$$

D'où, vu (4.3.2),

$$(4.3.3) \quad D^{m+1} U_0 = D^{m+1} w,$$

Donc,

$$D^m \frac{\partial U_0}{\partial x_i} = D^m \frac{\partial w}{\partial x_i},$$

d'où, vu (4.3.1),

$$D^m \left(\frac{\partial U_0}{\partial x_i} - U_i \right) = 0.$$

Lemme 4.4. Sous les hypothèses du Lemme 3, N° 3, et (2.1), N° 2, la composante U_0 de la solution U du problème de Cauchy (II) est la solution du problème de Cauchy (I).

Preuve. Pour le système (4.2.1), les hypothèses du théorème d'unicité du Chapitre III sont vérifiées, compte tenu de la Note qui suit le Lemme 4.2. Des raisonnements analogues à ceux du Chapitre III prouvent que la solution de ce système est unique; elle est donc nulle. D'où

$$U_i = \frac{\partial U_0}{\partial x_i}.$$

Posons

$$u = U_0;$$

puisque le problème (II) est résolu:

$$y_\alpha(x) = D^{\beta(\alpha)} U_{k(\alpha)} = D^\alpha u,$$

on a

$$\begin{cases} e[x, D^{m+1}u] = 0 \\ D^{m+1}u = D^{m+1}w \quad \text{sur } S_0; \end{cases}$$

le problème (I) est donc résolu.

5. Conclusion. Résumons comme suit le résultat obtenu:

Théorème. Sous les hypothèses a), b) et c) du N° 1, l'équation non linéaire

$$e[x, D^{m+1}u] = 0$$

admet, dans une bande $B: 0 \leq x_1 \leq T'$ une solution et une seule

$$u \in W_2^{(m+\mu+1)}(B)$$

vérifiant sur S_0 les données de Cauchy

$$u = w_0, D_1 u = w_1, \dots, D_1^{m+1} u = w_{m+1}$$

quand

$$e[x, D^{m+1}w_0, D^m w_1, \dots, w_{m+1}] = 0 \quad \text{sur } S_0;$$

on a

$$\sup_{0 \leq t \leq T'} \|D^{m+\mu+1}u, S(t)\| < +\infty;$$

$D^{m+2}u$ est uniformément continue sur B .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bochner, S. and Chandrasekharan, K. — *Fourier Transforms, Mathematics Studies*, 19, Princeton, 1949.
- [2] Dionne, P.A. — Opérateurs hyperboliques linéaires du type de Sobolev. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 250, 1960, p. 2983—85.
- [3] Dionne, P.A. — Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques quasi-linéaires et non linéaires. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 253, 1961, p. 2451—53.
- [4] Friedrichs, K.O. et Lewy H. — Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet beim Anfangsproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 98, 1928, p. 192—204.
- [5] Gårding, L. — Problème de Cauchy pour les équations quasi-linéaires strictement hyperboliques. Séminaire J. Leray, 1961—62, Collège de France, Paris.
- [6] Gårding, L. — L'inégalité de Friedrichs et Lewy pour les équations hyperboliques linéaires d'ordre supérieur. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 239, 1954, p. 849—50.
- [7] Gårding, L. — Colloque sur la théorie des équations aux dérivées partielles. CNRS, Nancy, 1956 (v. Leray [12]).
- [8] Gårding, L. — Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations. Lecture Notes. University of Chicago, 1957.
- [9] Hadamard, J. — Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris, 1932.
- [10] Leray, J. — Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.* 63, 1934, p. 317—45.
- [11] Leray, J. — Hyperbolic Differential Equations. The Institute for Advanced Study, Princeton, 1953.
- [12] Leray, J. — La théorie de L. Gårding des équations hyperboliques linéaires. Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E) Equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali. Varenna, 1956.
- [13] Petrowsky, I. — Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. *Rev. Math. Moscou*, N.S, 2, 1937, p. 814—68.
- [14] Petrowsky, I. — Quelques remarques sur mon mémoire sur le problème de Cauchy. *Mat. Sb.* N.S. 39(81), 1956, p. 267—272 (en russe).
- [15] Schwartz, L. — Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1951 (seconde édition du Tome I, 1957).
- [16] Sobolev, S. L. — Quelques questions de la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires. C.I.M.E Equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali. Varenna, 1956 (à paraître dans Monografie Matematiche du Consiglio Nazionale delle Ricerche).
- [17] Sobolev, S.L. — Quelques généralisations des théorèmes d'immersion. *Fundamenta mathematicae*, 47, 1959, p. 277—324 (en russe).

(Reçu le 3. III. 1962)

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

« CATÉGORIES INDUCTIVES ET STRUCTURES LOCALES. »

Vu et approuvé :

PARIS, LE 9 JUIN 1962.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MARC ZAMANSKY.

Vu

et Permis d'imprimer :

*Le Recteur de l'Académie
de Paris,*

JEAN ROCHE.

